



TESIS - SM 142501

**SOLUSI NUMERIK DARI MODEL ALIRAN  
FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK  
KONVEKSI CAMPURAN MELALUI BOLA  
BERMAGNET**

LUTFI MARDIANTO  
NRP 06111650010008

DOSEN PEMBIMBING:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2018





THESIS - SM 142501

# **NUMERICAL SOLUTION OF THE MODEL OF MAGNETOHYDRODYNAMICS MIXED CONVECTION FLOW PAST A MAGNETIC SPHERE**

LUTFI MARDIANTO  
NRP 06111650010008

SUPERVISORS:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER PROGRAM  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCE  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2018





Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Lutfi Mardianto  
NRP. 0611 1650 010 008

Tanggal Ujian  
Periode Wisuda

: 26 Juli 2018  
: September 2018

Disetujui oleh:



Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing I)



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M. Si  
NIP. 19830517 200812 1 003

(Pembimbing II)



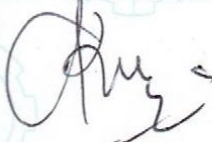
Dr. Hariyanto, M. Si.  
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)



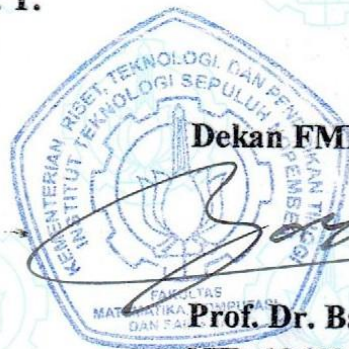
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp.  
NIP. 1961115 198703 1 003

(Penguji)



Dr. Imam Mukhlas, S.Si., M. T.  
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)



Dekan FMKSD,



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002



# **SOLUSI NUMERIK DARI MODEL ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK KONVEKSI CAMPURAN MELALUI BOLA BERMAGNET**

Nama Mahasiswa : Lutfi Mardianto  
NRP : 06111650010008  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

## **ABSTRAK**

Masalah yang diteliti dalam penelitian ini adalah konveksi campuran pada magnetohidrodinamik tak tunak untuk fluida kental yang mengalir melalui bola bermagnet. Persamaan pembangun diperoleh berupa persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi berdimensi. Variabel tak berdimensi digunakan mengubah persamaan menjadi persamaan tak berdimensi. Persamaan ini diuraikan dengan menggunakan teori lapisan batas, fungsi alir dan variabel similaritas. Persamaan dari permasalahan ini nantinya diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema implisit. Gesekan kulit dan bilangan Nusselt dipelajari berdasarkan kecepatan dan temperatur di sepanjang bola bermagnet. Ketebalan lapisan batas juga dipelajari dari variasi parameter non-dimensional diantaranya parameter magnetik  $M$ , bilangan Prandtl  $Pr$  dan parameter konveksi campuran  $\alpha$  selain waktu separasi dan titik separasi. Ketika parameter magnetik bertambah, kecepatan, temperatur dan gesekan kulit menurun, tetapi bilangan Nusselt meningkat. Tidak ada perubahan ketebalan lapisan batas, waktu separasi semakin cepat dan titik separasi semakin maju ketika parameter magnetik meningkat. Ketika bilangan Prandtl bertambah, kecepatan, temperatur dan gesekan kulit menurun, tetapi bilangan Nusselt meningkat dan titik separasi semakin maju. Untuk bilangan Prandtl  $0 < Pr < 1$ , lapisan batas bertambah saat bilangan Prandtl bertambah. Bilangan Prandtl tidak mempengaruhi waktu separasi. Ketika bilangan Richardson bertambah, kecepatan, temperatur dan gesekan kulit juga bertambah, tetapi bilangan Nusselt berkurang. Lapisan batas semakin tipis, waktu separasi semakin lambat dan titik separasi semakin mundur ketika bilangan Richardson bertambah.

**Kata-kunci:** magnetohidrodinamik, konveksi campuran, boundary layer, skema implisit



# NUMERICAL SOLUTION OF THE MODEL OF MAGNETOHYDRODYNAMICS MIXED CONVECTION FLOW PAST A MAGNETIC SPHERE

Name : Lutfi Mardianto  
NRP : 06111650010008  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

## ABSTRACT

The problem in this research is unsteady magnetohydrodynamics mixed convection for viscous fluid flow through a magnetic sphere. Governing equation are dimensional continuity equation, momentum equation and energy equation. Non-dimensional variables are used to transform the equations be the non-dimensional one. All of the equations are solved by using boundary layer theory, stream function and similarity variable. Further, the equations are solved numerically by using implicit scheme finite different method. Skin friction and Nusselt number is studied due to velocity and temperature along a magnetic sphere. Boundary layer thickness is also studied by using various of non-dimensional parameters, i.e., Prandtl number  $Pr$ , magnetic parameter  $M$  and mixed convection parameter  $\alpha$  as well as time and point separation. When magnetic parameter increases, velocity, temperature and skin friction decrease. There is no change on boundary layer thickness, separation time becomes earlier and separation point becomes shorter when magnetic parameter increases. When Prandtl number increases, velocity temperature and skin friction decrease, but Nusselt number increases and separation poin becomes shorter. For Prandtl number  $0 < Pr < 1$ , boundary layer thickness increases as Prandtl number also increases. Prandtl number does not affect separation time. When Richardson number increases, velocity, temperature and skin friction increase, but Nusselt number decreases. Boundary layer thickness decreases, time separation becomes longer and point separation becomes farther when Richardson number increases.

**Key-words:** magnetohydrodynamics, mixed convection, boundary layer, implicit scheme



## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul

### **”Solusi Numerik dari Model Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Konveksi Campuran Melalui Bola Bermagnet.”**

Tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
4. Kepala Program Studi Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dosen pembimbing I dalam penulisan tesis sekaligus dosen wali selama menempuh program studi Strata 2,
6. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing II dalam penulisan tesis,
7. Dr. Hariyanto, M.Si., Dr. Chairul Imron M.I.Komp., Dr. Imam Mukhlash S.Si., M.T. selaku dosen penguji dalam penulisan tesis ini,
8. Seluruh civitas akademika Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data,
9. Orang tua, kakak, dan adik yang selalu memberikan do’a serta dukungan selama menempuh program studi Strata-2,
10. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika yang menginspirasi dan berbagi ilmu sehingga selama perkuliahan sampai penulisan tesis ini selesai berjalan dengan lancar.

Penulis menyadari bahwa penulisan tesis ini tidak terlepas dari adanya kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Juni 2018

Penulis



# DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN TESIS	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
DAFTAR TABEL	xix
BAB 1     PENDAHULUAN	1
1.1   Latar Belakang . . . . .	1
1.2   Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3   Batasan Penelitian . . . . .	3
1.4   Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.5   Manfaat Penelitian . . . . .	4
BAB 2     KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1   Penelitian-penelitian Terkait . . . . .	5
2.2   Pemodelan Matematika . . . . .	9
2.3   Fluida . . . . .	11
2.3.1   Fluida Berdasarkan Tingkat Viskositas . . . . .	11
2.3.2   Fluida Berdasarkan Kemampatan . . . . .	12
2.3.3   Aliran Fluida Berdasarkan Waktu . . . . .	12
2.4   Konveksi Campuran . . . . .	13
2.5   Magnetohidrodinamik . . . . .	13
2.6   Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) . . . . .	14
2.7   Metode Beda Hingga Skema Implisit . . . . .	16
2.8   Validasi Model . . . . .	18
BAB 3     METODE PENELITIAN	19
3.1   Tahapan Penelitian . . . . .	19
3.2   Tempat Penelitian . . . . .	20

BAB 4	Model Matematika	21
4.1	Persamaan Pembangun	22
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	24
4.1.2	Persamaan Momentum	27
4.1.3	Persamaan Energi	33
4.1.4	Transformasi Variabel Tak Berdimensi	39
4.1.5	Teori Lapisan Batas	41
4.1.6	Fungsi Alir	42
4.1.7	Persamaan Similaritas	43
BAB 5	Penyelesaian Model Matematika	47
5.1	Diskritisasi dan Linierisasi	47
5.1.1	Model Matematika untuk <i>Small Time</i>	48
5.1.2	Model Matematika untuk <i>Large Time</i>	50
5.1.3	Gesekan Kulit	52
5.1.4	Perpindahan Panas	53
5.2	Algoritma Thomas	54
5.3	Algoritma	61
5.4	Validasi Model	62
5.5	Penyelesaian Numerik	64
5.5.1	Pengaruh Parameter Magnetik	65
5.5.2	Pengaruh Bilangan Prandtl	69
5.5.3	Pengaruh Bilangan Richardson	76
BAB 6	Penutup	83
6.1	Kesimpulan	83
6.2	Saran	84
DAFTAR PUSTAKA		87
LAMPIRAN		89

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1.1 (a) Piston, (b) Objek fisik penelitian .....	2
Gambar 2.1 Skema separasi lapisan batas pada silinder sirkular ....	15
Gambar 2.2 Aliran lapisan batas menuju titik separasi .....	15
Gambar 2.3 Kriteria MRS $u = 0$ dan $\partial u / \partial y = 0$ .....	16
Gambar 2.4 Skema implisit .....	16
Gambar 4.1 (a) Koordinat bola, (b) koordinat bola dalam dua dimensi	21
Gambar 4.2 Ilustrasi derivatif substansial .....	23
Gambar 4.3 Model volume kontrol pada ruang yang tetap .....	24
Gambar 4.4 Aliran fluida yang keluar-masuk pada model elemen kecil yang tetap .....	26
Gambar 4.5 Model aliran fluida yang melalui elemen kecil pada ruang yang tetap .....	29
Gambar 4.6 Laju pertambahan panas karena aliran fluida yang keluar-masuk .....	36
Gambar 5.1 Diagram Alir Algoritma Program .....	62
Gambar 5.2 Perbandingan profil kecepatan dan dengan $Pr = 1$ dan $Ri = 0$ saat $t = 0.2$ .....	63
Gambar 5.3 Perbandingan profil temperatur dengan $Pr = 1$ dan $Ri = 0$ saat $t = 0.2$ .....	63
Gambar 5.4 Profil kecepatan dengan parameter magnetik berdasarkan Tabel 5.2 untuk bilangan $Pr = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.15$ .....	66
Gambar 5.5 Profil gesekan kulit dengan parameter magnetik untuk bilangan $Pr = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	66
Gambar 5.6 Profil temperatur dengan parameter magnetik untuk bilangan $Pr = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	67
Gambar 5.7 Profil bilangan Nusselt dengan parameter magnetik untuk bilangan $Pr = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	67
Gambar 5.8 Profil kecepatan variasi bilangan Prandtl dengan saat $t = 0.2$ .....	71
Gambar 5.9 Profil temperatur dengan variasi bilangan Prandtl dengan dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	71
Gambar 5.10 Profil gesekan kulit dengan variasi bilangan Prandtl dengan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	72
Gambar 5.11 Profil perpindahan panas dengan variasi bilangan Prandtl dengan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	72

Gambar 5.12	Profil kecepatan dengan variasi bilangan Richardson dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$ .....	77
Gambar 5.13	Profil gesekan kulit dengan variasi bilangan Richardson dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$ .....	77
Gambar 5.14	Profil temperatur dengan variasi bilangan Richardson dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$ .....	78
Gambar 5.15	Profil bilangan Nusselt dengan variasi bilangan Richardson dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$ .....	78
Gambar 1.1	Penurunan gravitasi pada arah $x$ dan $y$ .....	89
Gambar 2.1	(a) Koordinat bola, (b) Vektor unit bola .....	91
Gambar 2.2	Pasangan titik sumber dan titik tampung .....	93
Gambar 2.3	Aliran bebas bola .....	95

## DAFTAR SIMBOL

$\cdot$	: operator perkalian dot
$\times$	: operator perkalian cross
$\nabla$	: operator gradien (per meter)
$\nabla \cdot$	: operator divergensi (per meter)
$\nabla \times$	: operator curl (per meter)
$\partial/\partial t$	: turunan parsial terhadap waktu (per sekon)
$\partial/\partial x$	: turunan parsial terhadap arah- $x$ (per meter)
$\partial/\partial y$	: turunan parsial terhadap arah- $y$ (per meter)
$dS$	: luas permukaan (meter <sup>2</sup> )
$dV$	: volume (meter <sup>3</sup> )
$\rho$	: massa jenis (kilogram per meter <sup>3</sup> )
$u$	: kecepatan terhadap arah- $x$ (per meter)
$v$	: kecepatan terhadap arah- $y$ (per meter)
$\mathbf{p}$	: tekanan (Newton per meter <sup>2</sup> atau Pascal)
$\tau$	: tegangan geser (Newton per meter <sup>2</sup> )
$\mu$	: koefisien viskositas molekul (Newton-sekon per meter <sup>2</sup> )
$\lambda$	: koefisien viskositas kedua (Newton-sekon per meter <sup>2</sup> )
$\nu$	: viskositas kinematik (Newton-meter-sekon per kilogram)
$\mathbf{J}$	: rapat arus listrik (Ampere per meter <sup>2</sup> )
$\mathbf{E}$	: medan listrik (Volt per meter <sup>2</sup> )
$\mathbf{B}$	: medan magnet (Tesla atau Weber per meter <sup>2</sup> )
$\epsilon_0$	: permitivitas ruang hampa ( $8.854 \times 10^{-12}$ Coulomb <sup>2</sup> per Newton-meter <sup>2</sup> )
$\mu_0$	: permeabilitas ruang hampa ( $4\pi \times 10^{-7}$ Newton per Ampere <sup>2</sup> )
$\sigma$	: konduktivitas listrik (Ampere per Volt)
$g$	: gravitasi (10 meter per sekon <sup>2</sup> )
$\beta$	: koefisien ekspansi panas (per °Kelvin)
$e$	: energi spesifik (Joule per kilogram)
$h$	: entalpi (Joule per kilogram)
$E$	: energi (Joule)
$W$	: usaha (Joule)
$Q$	: kalor (Joule)
$H$	: reaksi panas (Joule)
$m$	: massa (kilogram)
$C_p$	: kalor jenis (Joule per kilogram-Celcius)
$T$	: suhu (Celcius)
$k$	: kapasitas kalor (Joule per Celcius)



## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Perkembangan penelitian .....	10
Tabel 5.1 Hasil numerik profil kecepatan dan temperatur pada penelitian yang berbeda .....	64
Tabel 5.2 Nilai parameter magnetik berdasarkan bahan pembuat bola	65
Tabel 5.3 Pengaruh parameter magnetik berdasarkan bahan bola magnetik pada ketebalan lapisan batas dan waktu separasi	69
Tabel 5.4 Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi parameter magnetik dengan $Pr = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	70
Tabel 5.5 Pengaruh bilangan Prandtl pada ketebalan lapisan batas dan waktu separasi .....	74
Tabel 5.6 Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Prandtl dengan $M = 1$ dan $Ri = 1$ saat $t = 0.2$ .....	75
Tabel 5.7 Nilai bilangan Richardson berdasarkan koefisien ekspansi termal .....	76
Tabel 5.8 Pengaruh bilangan Richardson pada ketebalan lapisan batas, waktu separasi, titik separasi .....	80
Tabel 5.9 Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Richardson pada konveksi yang membantu $Ri > 0$ dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$ .	81
Tabel 5.10 Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Richardson pada konveksi yang berlawanan $Ri < 0$ dengan $M = 1$ dan $Pr = 1$ saat $t = 0.2$	82





# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Medan magnet mempengaruhi beragam aliran yang mengalir secara alamiah ataupun yang dipengaruhi campur tangan manusia. Contoh medan magnet yang mengalir secara alamiah adalah medan magnet bumi yang menjaga pergerakan aliran di dalam inti bumi, medan magnet matahari yang menyebabkan adanya *sunspot* dan *solar flares*, medan magnet galaksi yang mempengaruhi tata letak bintang-bintang di angkasa. Dalam kehidupan manusia, medan magnet digunakan untuk mengaduk, memompa atau memanaskan logam cair. Studi mengenai aliran yang dipengaruhi oleh medan magnet ini disebut *magnetohydrodynamic* (MHD) (Davidson, 2001).

Pengendalian suatu aliran yang menggunakan medan magnet dan temperatur fluida sudah ada sejak lama. Akan tetapi, teknologi dan komputasi pada saat itu masih belum memadai. Berdasarkan ide tersebut, arus listrik dalam fluida dapat dihasilkan dengan membuat perubahan kecepatan maupun temperatur. Akibatnya, medan magnet yang berasal dari luar membangun gaya-gaya pada fluida secara keseluruhan. Untuk saat ini, perpindahan panas dan medan magnet pada aliran fluida digunakan secara luas dalam penerapannya, mengabaikan apakah fluida tersebut merupakan fluida Newtonian atau non-Newtonian.

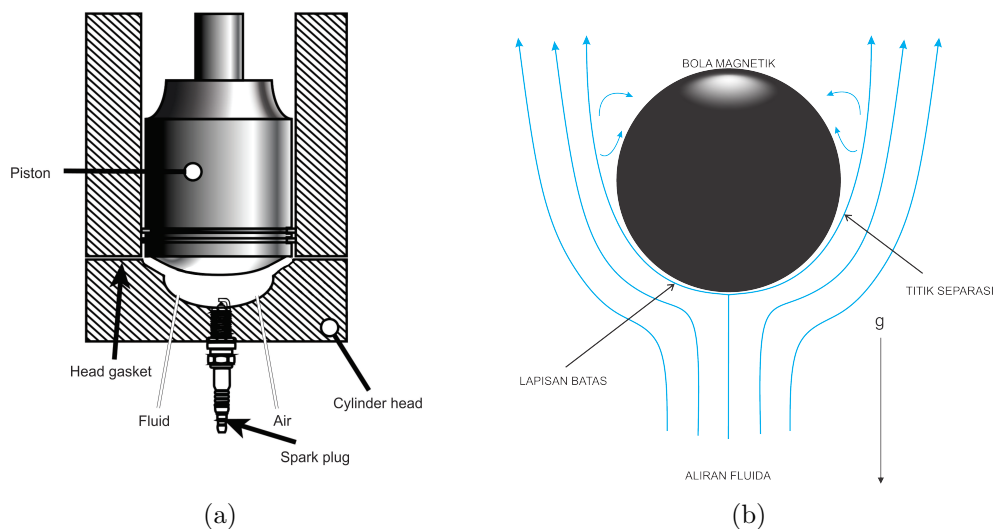
Salah satu contoh fluida Newtonian adalah fluida kental. Fluida ini adalah fluida dengan model paling sederhana yang memuat viskositas. Pengamatan mengenai fluida kental pada magnetohidrodinamik yang melewati suatu benda telah dilakukan oleh banyak peneliti, diantaranya bola pejal (Nazar, dkk., 2002), bola teriris (Widodo, dkk., 2015) dan bola berpori (Rahma, 2017).

Sifat fluida kental yang viskositasnya dipengaruhi oleh perubahan temperatur dan tekanan menarik untuk dikaji. Keberadaan perubahan temperatur pada fluida kental dapat dipengaruhi oleh adanya kekuatan dari luar selain dari pengaruh gaya apung pada fluida itu sendiri. Perpindahan panas yang disebabkan oleh adanya perubahan temperatur pada aliran fluida disebut konveksi alami, sedangkan perpindahan panas akibat adanya kekuatan

dari luar disebut konveksi paksa. Perpaduan dua jenis konveksi ini disebut konveksi campuran. Penelitian tentang konveksi campuran pernah dilakukan oleh Mohammad, dkk. (2012).

Berbicara tentang fluida yang mengalir melewati suatu benda melibatkan gaya tarikan di sekitarnya. Kejadian ini dipahami melalui identifikasi aliran separasi dan hal ini terjadi pada aliran tak tunak. Aliran separasi adalah aliran yang alirannya berubah dari laminar menjadi turbulen. Mohammad, dkk. (2012) telah mengamati aliran separasi dalam dimensi dua dan tunak pada lapisan yang mengalir melewati sebuah bola pejal dalam fluida mikroktub tanpa memperhatikan adanya pengaruh medan magnet.

Penelitian sebelumnya mengenai aliran magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak yang melewati suatu benda telah dilakukan oleh Widodo, dkk. (2015) dan Rahma, dkk. (2017). Widodo, dkk. (2015) dan Rahma, dkk. (2017) menggunakan bola sebagai pengahalang dengan konveksi paksa. Perbedaannya terletak pada bola, Widodo, dkk. (2015) menggunakan bola pejal dan Rahma, dkk. menggunakan bola berpori. Kedua penelitian ini, kondisi bola tidak bermagnet, tetapi fluida yang mengalir terinduksi oleh medan magnet.



Gambar 1.1: (a) Piston, (b) Objek fisik penelitian

Ide tentang pengaruh medan magnet terhadap aliran fluida dapat diterapkan pada piston seperti pada Gambar 1.1(a). Piston tersebut mengandung medan magnet sehingga dapat diketahui apa pengaruh medan magnet tersebut terhadap energi yang diperoleh pada piston disertai adanya konveksi campuran. Konveksi campuran terdiri dari konveksi alami yang

dipengaruhi gaya apung dan konveksi paksa. Pengerjaan penelitian ini diawali dengan meneliti suatu fluida kental yang mengalir dari bawah ke atas dengan benda yang berupa bola magnetik seperti pada Gambar 1.1(b) dimana bola tersebut tidak bergerak tanpa adanya batasan seperti pada Gambar 1.1(a). Yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah profil kecepatan, temperatur, gesekan kulit, perpindahan panas, ketebalan lapisan batas, titik separasi dan waktu separasi. Berdasarkan fenomena tersebut, permasalahan ini akan dikembangkan bentuk modelnya. Selanjutnya, model matematikanya dibuat dan disimulasikan secara numerik dengan metode beda hingga skema implisit.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, rumusan masalah untuk penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika dari aliran konveksi campuran pada magnetohidrodinamik tak tunak yang mengalir melalui bola bermagnet untuk fluida kental?
2. Bagaimana pengaruh konveksi campuran dan medan magnet terhadap profil kecepatan, temperatur, gesekan kulit, perpindahan panas, ketebalan lapisan batas, titik separasi dan waktu separasi dengan metode beda hingga skema implisit?

## **1.3 Batasan Penelitian**

Di dalam rencana penelitian ini, diberikan beberapa batasan masalah dengan rincian sebagai berikut.

1. Fluida bersifat kental mengalir dari bawah ke atas, keadaan tak tunak (*unsteady*), serta diasumsikan *incompressible* karena tidak ada perubahan massa jenis.
2. Geometri benda yang diamati dalam penelitian ini adalah bola pejal atau tidak berpori, serta bermagnet.
3. Induksi medan magnet diabaikan karena diasumsikan bahwa bilangan magnetik Reynold sangat kecil. Tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga medan listrik nol. Medan magnet dihasilkan dari gaya Lorentz.
4. Untuk mendapatkan penyelesaian model tersebut digunakan metode beda hingga dengan skema implisit.

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengembangkan model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik konveksi campuran melalui bola bermagnet.
2. Untuk mengetahui pengaruh konveksi campuran dan medan magnet terhadap perubahan profil kecepatan dan temperatur, gesekan kulit, perpindahan panas, ketebalan lapisan batas, titik separasi dan waktu separasi.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian pada ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan matematika terapan di bidang teknologi dan industri material maju.

## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 Penelitian-penelitian Terkait

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut.

1. *On The Mixed Convection Boundary Layer Flow about A Solid Sphere with Constant Temperature Surface* (Nazar, dkk., 2002)

Gambaran umum dari penelitian ini adalah fluida kental mengalir dari bawah ke atas secara tunak melalui bola pejal. Tidak terdapat medan magnet pada aliran fluida maupun bola pejal, tetapi terdapat konveksi campuran dimana konveksi tersebut berupa konveksi yang membantu ( $T_w > T_\infty$ ) dan berlawanan ( $T_w < T_\infty$ ) yang mempengaruhi aliran fluida. Model matematika dari permasalahan ini adalah sebagai berikut.

- Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0$$

- Persamaan momentum

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = \bar{u}_e\frac{\partial\bar{u}_e}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} + \bar{g}\beta(\bar{T} - T_\infty)\sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

- Persamaan energi

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} = \frac{\bar{v}}{\text{Pr}}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}$$

Kajian dalam penelitian ini adalah pengaruh parameter konveksi campuran dalam konveksi yang membantu atau konveksi yang berlawanan terhadap gesekan kulit dan perpindahan panas dengan bilangan Prandtl  $\text{Pr} = 0.7$  (udara) dan  $\text{Pr} = 6.8$  (air). Selain itu, titik separasi yang terjadi dipelajari pada permukaan bola pada  $0^\circ < x < 120^\circ$ . Model matematika dari permasalahan dalam penelitian ini diselesaikan menggunakan metode beda hingga skema Keller-box.

2. *Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past A Sphere in A Micropolar Fluid* (Mohammad, dkk, 2012)

Gambaran penelitian ini adalah fluida yang berupa fluida mikropolar mengalir dari bawah ke atas secara tak tunak. Fluida mikropolar merupakan fluida yang memiliki kemampuan berotasi. Aliran fluida tidak diengaruhi oleh medan magnet, tetapi dipengaruhi konveksi campuran. Model matematika dari permasalahan ini adalah sebagai berikut.

- Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{r}} = 0$$

- Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\bar{x}} + \frac{(\mu + \kappa)}{\rho}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\right) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\rho}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} + \beta(\bar{T} - T_\infty)\sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} &= -\frac{\partial p}{\partial\bar{y}} + \frac{(\mu + \kappa)}{\rho}\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}\right) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\rho}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} - \beta(\bar{T} - T_\infty)\cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \end{aligned}$$

- Persamaan momentum angular

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{y}} &= \frac{\gamma}{\rho_j}\left(\frac{\partial^2\bar{N}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{N}^2}\right) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\rho_j}\left(-2\bar{N} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right) \end{aligned}$$

- Persamaan energi

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} = \frac{c}{\rho C_p}\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}\right)$$

Kajian dalam penelitian ini adalah gesekan kulit dan perpindahan panas selain waktu separasi dengan variasi parameter material, mikropolar dan konveksi campuran. Konveksi campuran dibedakan atas konveksi yang membantu dan konveksi yang berlawanan. Model pembangun diselesaikan menggunakan metode beda hingga skema Keller-box.

3. *The effect of Prandtl number and magnetic parameter on forced convection unsteady magnetohydrodynamics boundary layer flow of a viscous fluid past a sphere* (Widodo, dkk., 2015)

Ilustrasi objek fisik dari penelitian ini adalah fluida kental yang mengalir dari bawah ke atas melalui bola pejal yang tidak menghantarkan listrik, tetapi fluida tersebut menghantarkan listrik. Model matematika yang dihasilkan dari permasalahan ini adalah sebagai berikut.

- Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0$$

- Persamaan momentum

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial\bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \right) - \sigma B_0 \bar{u}^2 \\ \rho \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial\bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2} \right) - \sigma B_0 \bar{v}^2\end{aligned}$$

- Persamaan energi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} \right) = c \left( \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} \right)$$

Dalam penelitian ini, hal yang dikaji adalah pengaruh bilangan Prandtl dan parameter magnetik terhadap kecepatan dan temperatur fluida pada aliran lapisan batas dengan konveksi paksa. Persamaan yang dibangun pada penelitian ini diselesaikan dengan metode beda hingga skema Keller-box.

4. *The unsteady micropolar fluid flow past a sliced sphere* (Widodo dan Ningtyas, 2017)

Gambaran objek penelitian ini adalah fluida mikro kutub mengalir dari bawah ke atas secara tak tunak yang dipengaruhi medan magnet. Bola teriris tipe D yang digunakan adalah bola pejal dan tidak berpori. Penelitian ini mengkaji pengaruh sudut irisan bola terhadap kecepatan dan mikro rotasi di titik stagnasi  $x = 0$  pada lapisan batas. Model matematika yang dihasilkan dari permasalahan ini adalah sebagai berikut.

- Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0$$

- Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial\bar{x}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \right) \\ &\quad + \kappa \frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} - \sigma B_0 \bar{u}^2 \\ \rho \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial\bar{y}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2} \right) \\ &\quad + \kappa \frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} - \sigma B_0 \bar{v}^2 \end{aligned}$$

- Persamaan momentum angular

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\bar{y}} \right) &= \gamma \left( \frac{\partial^2\bar{N}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{N}^2} \right) \\ &\quad + \kappa \left( -2\bar{N} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} \right) \end{aligned}$$

Model matematika pada penelitian ini diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-*box*.

5. *Forced convection of unsteady magnetohydrodynamics fluid past a porous sphere* (Rahma, 2017)

Gambaran objek fisik penelitian ini adalah fluida kental yang mengalir dari bawah ke atas melalui bola berpori yang terinduksi medan magnet dan dipengaruhi konveksi paksa. Model matematika pada penelitian ini diberikan sebagai berikut.

- Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} = 0$$



- Persamaan momentum

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0) \bar{u}^2 \\ &\quad - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) \bar{g}_x - \frac{\mu}{K_*} \bar{u} \\ \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma(b + B_0) \bar{v}^2 \\ &\quad - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) \bar{g}_y - \frac{\mu}{K_*} \bar{v}\end{aligned}$$

- Persamaan energi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Penelitian ini mengkaji pengaruh parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter porositas dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida pada lapisan batas di titik stagnasi terendah  $x = 0$ . Model matematika dari permasalahan ini diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema Keller-*box*.

Pada penelitian ini, fluida kental mengalir dari bawah ke atas melalui bola pejal dimana bola tersebut bermagnet, tetapi fluida tidak bermagnet disertai konveksi campuran. Hal yang dikaji adalah profil kecepatan, temperatur, gesekan kulit, perpindahan panas, ketebalan lapisan batas, waktu dan titik separasi. Parameter yang digunakan untuk mengetahui profil yang telah disebutkan diantaranya parameter magnetik  $M$ , bilangan Prandtl  $Pr$  dan parameter konveksi campuran atau bilangan Richardson  $Ri$ . Model matematika yang dibangun berupa persamaan momentum, dan persamaan energi. Persamaan ini diselesaikan secara numerik dengan metode beda hingga skema implisit. Untuk lebih mengetahui kontribusi dari penelitian ini, perkembangan penelitian sebelumnya disajikan dalam bentuk Tabel 2.1.

## 2.2 Pemodelan Matematika

Analisis suatu sistem dalam sains terapan seperti teknologi, ekonomi, biologi dalam perkembangannya memerlukan metode matematika dan sains komputer. Suatu sistem harus diketahui interpretasi dari suatu fenomenanya sehingga model matematika sangat penting untuk menjelaskan hal tersebut. Model matematika dibuat untuk menjelaskan dari suatu sistem pada kehidupan nyata dengan menggunakan persamaan atau lebih umum dengan struktur komputasi dan logika (Bellomo, dkk., 2007). Model matematika

Tabel 2.1: Perkembangan penelitian

No	Peneliti	Judul	Metode	Benda	Fluida	Keterangan
1	Nazar, dkk. (2002)	On The Mixed Convection Boundary Layer Flow about A Solid Sphere with Constant Temperature Surface	Metode beda hingga skema Keller-box	Bola pejal tidak bermagnet	Fluida kental tidak bermagnet	Kajian pada penelitian ini adalah pengaruh pengaruh bilangan Prandtl gesekan kulit dan perpindahan panas, dan aliran separasi pada konveksi yang membantu dan yang berlawanan pada $0^\circ \leq x \leq 120^\circ$ . Jika bilangan Prandtl meningkat, gesekan kulit akan berkurang dan perpindahan panas bertambah. Profil temperatur meningkat dan profil kecepatan menurun saat parameter konveksi campuran menurun.
2	Mohammad, dkk. (2012)	Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past A Sphere in A Micropolar Fluid	Metode beda hingga skema Keller-box	Bola pejal tidak bermagnet	Fluida mikrokutub tidak bermagnet	Kajian pada penelitian ini adalah pengaruh pengaruh parameter material, mikropolar dan konveksi campuran terhadap waktu separasi. Jika parameter mikropolar meningkat untuk konsentrasi kuat ( $n = 0$ ), waktu separasi berkurang untuk kasus konveksi yang membantu dan berlawanan. Untuk konsentrasi lemah ( $n = 1/2$ ), waktu separasi meningkat untuk konveksi yang membantu, tetapi menurun untuk konveksi yang berlawanan.
3	Widodo, dkk. (2015)	The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magneto hydrodynamics Boundary Layer flow of A Viscous Fluid Past A Sphere	Metode beda hingga skema Keller-box	Bola pejal tidak bermagnet	Fluida kental bermagnet	Kajian dalam penelitian ini adalah pengaruh bilangan Prandtl dan parameter magnetik terhadap kecepatan dan temperatur pada lapisan batas dengan pengaruh medan magnet dan konveksi paksa. Jika bilangan Prandtl bertambah, temperatur menurun. Jika parameter magnetik bertambah kecepatan meningkat dan temperatur berkurang.
4	Widodo dan Ningtyas (2017)	The unsteady micropolar fluid flow past a sliced sphere	Metode beda hingga skema Keller-box	Bola teriris tidak bermagnet	Fluida mikrokutub tidak bermagnet	Kajian dalam penelitian ini adalah pengaruh sudut irisan pada lapisan batas. Profil kecepatan akan meningkat seiring dengan bertambahnya sudut irisan pada fluida yang memiliki konsentrasi kuat dan lemah. Profil mikrorotasi menurun seiring bertambahnya sudut irisan pada fluida yang memiliki konsentrasi kuat. Hal ini berkebalikan dengan fluida yang memiliki konsentrasi tinggi.
5	Rahma, dkk. (2017)	Forced convection of unsteady magnetohydrodynamics fluid past a porous sphere	Metode beda hingga skema Keller-box	Bola berpori tidak bermagnet	Fluida kental tidak bermagnet	Kajian dalam penelitian ini adalah pengaruh bilangan Prandtl, parameter magnetik, porositas, permeabilitas dan konveksi paksa pada lapisan batas di titik stagnasi terendah $x = 0$ . Bilangan Prandtl tidak mempengaruhi kecepatan saat konveksi paksa. Kecepatan akan meningkat seiring dengan bertambahnya parameter magnetik, porositas dan konveksi paksa, tetapi menurun seiring bertambahnya parameter permeabilitas. Temperatur akan menurun seiring meningkatnya bilangan Prandtl, parameter magnetik, porositas dan konveksi paksa, tetapi meningkat seiring bertambahnya parameter permeabilitas.

memerankan sains dengan bentuk struktur matematika maupun metode dari suatu kehidupan nyata secara objektif terdefinisi dengan baik. Manfaat model matematika adalah untuk menghubungkan metode dan struktur matematika dengan suatu sistem dalam kehidupan nyata yang nantinya disimulasikan komputer.

Model matematika adalah kumpulan persamaan yang mendefinisikan perubahan variabel keadaan atas variabel bergantung (Bellomo, dkk., 2007). Nilai dari variabel keadaan, dalam hal ini variabel bergantung, berhubungan

dengan variabel bebas. Secara umum, variabel bebas berupa waktu dan ruang.

## 2.3 Fluida

Fluida memiliki kemampuan untuk mengalir dan tidak menolak terhadap adanya perubahan bentuk. Hal ini berarti fluida mampu mengambil bentuk wadah dimana fluida itu berada. Kemampuan ini dikarenakan fluida tidak mampu mengadakan tegangan geser. Jadi, dapat disimpulkan bahwa fluida merupakan suatu substansi yang struktur molekulnya mengalami perubahan jika terkena tegangan geser secara terus menerus meskipun tegangan geser tersebut kecil.

Aliran fluida disebabkan adanya gaya dari luar yang bekerja pada fluida. Ketika suatu fluida dikenakan suatu gaya, yang membedakan untuk mempelajari fluida tersebut adalah sifatnya. Sifat yang paling penting dari fluida sederhana adalah kepadatan (*density*) dan kekentalan (*viscosity*).

### 2.3.1 Fluida Berdasarkan Tingkat Viskositas

Ada dua jenis fluida jika fluida tersebut dibedakan berdasarkan viskositasnya, yaitu fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian. Untuk perinciannya, akan dijelaskan sebagai berikut.

#### 1. Fluida Newtonian

Fluida Newtonian adalah fluida yang memiliki tegangan geser. Contoh fluida Newtonian secara umum adalah air. Fluida memiliki sifat yang unik, yaitu fluida tetap mengalir meskipun ada suatu gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini dikarenakan viskositasnya tidak berubah ketika ada gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas fluida ini hanya berubah ketika terdapat perubahan suhu dan tekanan. Viskositas merupakan suatu konstanta yang menghubungkan antara tegangan geser dan gradien kecepatan yang dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut (Pritchard, 2011).

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

dimana

- $\tau$  : tegangan geser ( $N/m^2$  atau Pa)
- $\mu$  : viskositas ( $Ns/m^2$  atau Pa.s)
- $\partial u/\partial y$  : gradien kecepatan fluida yang arahnya tegak lurus dengan tegangan geser ( $s^{-1}$ )

## 2. Fluida Non-Newtonian

Berbeda dengan fluida Newtonian, fluida non-Newtonian akan mengalami perubahan viskositas ketika ada gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini dikarenakan viskositasnya tidak tetap. Sebagai contoh ketika kanji atau tapioka yang diberikan suatu gaya (diaduk), maka kanji atau tapioka tersebut semakin kental. Sifat ini disebut *dilatant*. Sedangkan fluida non-Newtonian yang semakin encer ketika ada suatu gaya yang bekerja pada fluida tersebut, maka fluida ini bersifat disebut *pseudoplastic*. Salah satu contohnya adalah permen karet.

### 2.3.2 Fluida Berdasarkan Kemampatan

Fluida berdasarkan kemampatannya (*compressibility*) dibedakan menjadi dua, yaitu fluida *compressible* dan fluida *incompressible*. Fluida yang aliran dimana densitasnya konstan disebut fluida *incompressible* (Versteeg dan Malalasekera, 2007), misalnya air. Jika sebaliknya, maka fluida itu disebut fluida (*compressible*), misalnya udara. Jadi, secara umum cairan digolongkan sebagai fluida *incompressible*, sedangkan gas digolongkan sebagai fluida *compressible*.

### 2.3.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu dibedakan menjadi dua (Widodo, 2012), yaitu

1. Aliran tunak (*steady flow*) merupakan aliran yang kecepatan fluidanya tidak dipengaruhi oleh waktu sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Contoh aliran tunak adalah aliran pada suatu saluran atau sungai dimana tidak terdapat perubahan aliran yang disebabkan banjir, hujan, dan sebagainya.

2. Aliran tak tunak (*unsteady flow*) merupakan aliran yang kecepatan fluidanya dipengaruhi oleh perubahan waktu sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

Contohnya aliran tak tunak adalah aliran pada suatu saluran atau sungai dimana terdapat perubahan aliran yang disebabkan banjir, hujan, dan sebagainya.

## 2.4 Konveksi Campuran

Pada umumnya, terdapat tiga tipe dari perpindahan panas, yaitu konveksi, konduksi, dan radiasi. Dalam perpindahan panas pada fluida, apabila terdapat fluida yang mengalir melalui permukaan suatu benda dimana terdapat perbedaan temperatur, maka akan terjadi perpindahan panas secara konveksi. Akan tetapi, apabila fluida tidak mengalir, maka perpindahan panas terjadi secara konduksi. Sedangkan perpindahan panas tanpa adanya perantara disebut radiasi.

Konveksi secara umum dapat dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu konveksi alami (bebas), konveksi paksa dan konveksi campuran. Konveksi alami adalah konveksi dimana gaya apung sebagai sumbernya (Leal, 1992), sedangkan konveksi paksa menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang sangat dipengaruhi oleh kekuatan dari luar dengan mengabaikan adanya konveksi alami (Leal, 1992). Sementara itu, perpaduan kedua konveksi ini disebut konveksi campuran.

## 2.5 Magnetohidrodinamik

Magnetohidrodinamik adalah salah satu cabang mekanika dimana berkaitan dengan pergerakan fluida penghantar listrik di bawah pengaruh medan magnet. Pergerakan fluida melalui medan magnet menimbulkan arus listrik. Arus listrik yang mengalir melalui medan magnet berhubungan dengan *body force* yang disebut gaya Lorentz, yaitu gaya yang mempengaruhi arah aliran fluida. Keterhubungan antara hidrodinamik dan elektrodinamik ini menggambarkan karakteristik magnetohidrodinamik (MHD).

Bentuk persamaan MHD merupakan kombinasi persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik (Arber, 2013). Persamaan ini terdiri dari persamaan konservasi massa, persamaan momentum, persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut ini bentuk ideal persamaan MHD.

1. Persamaan konservasi massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

2. Persamaan momentum

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \mathbf{p} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

### 3. Persamaan konservasi energi

$$\rho \frac{De}{Dt} = 0 \quad (2.3)$$

### 4. Persamaan Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.6)$$

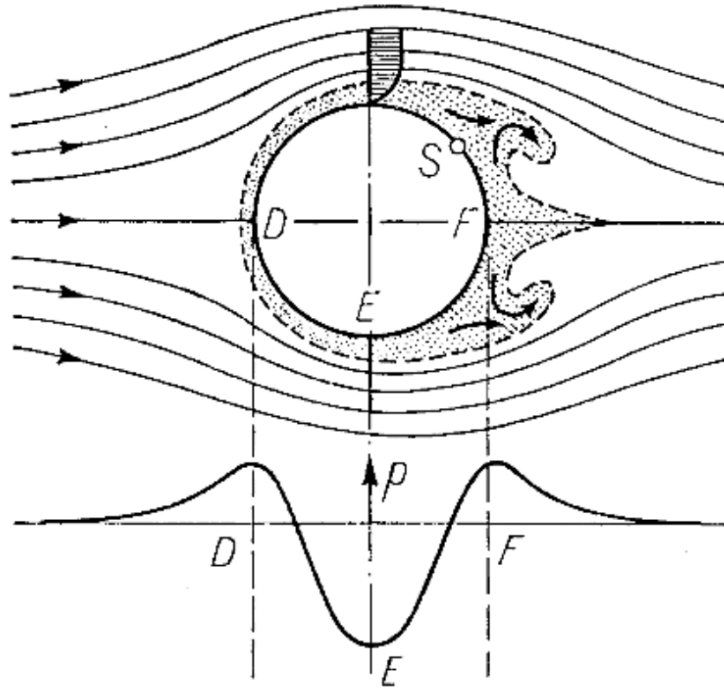
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.7)$$

## 2.6 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Penerapan viskositas yang kecil dan berakibat pada bilangan Reynolds yang besar banyak diterapkan pada bidang teknik. Pendekatan kondisi *no-slip* kurang tepat yaitu kecepatan pada permukaan dinding tidak nol, tetapi sangat kecil. Hanya keberadaan viskositas yang sangat kecil yang memenuhi kondisi *no-slip*. Pada bilangan Reynolds yang besar, perubahan kecepatan pada permukaan dinding menuju nol terjadi pada lapisan tipis disebut lapisan batas oleh Ludwig Prandtl (1904) (Schlichting, 2017).

Dari Gambar 2.1, pada titik D sampai E terjadi peningkatan kecepatan dan penurunan tekanan. Sedangkan pada titik E sampai F terjadi penurunan kecepatan dan peningkatan tekanan dimana titik S merupakan titik separasi. Untuk aliran fluida dari titik D ke titik E, tekanan berubah menjadi energi kinetik. Di sisi lain, aliran fluida titik E ke titik F berubah dari energi kinetik menjadi tekanan. Akibat gaya gesek pada lapisan batas, energi kinetik pada titik E ke titik F berkurang sehingga fluida tidak mampu mengatasi tekanan pada di titik tersebut. Hal ini berakibat menurunnya kecepatan fluida bahkan menuju nol maupun negatif.

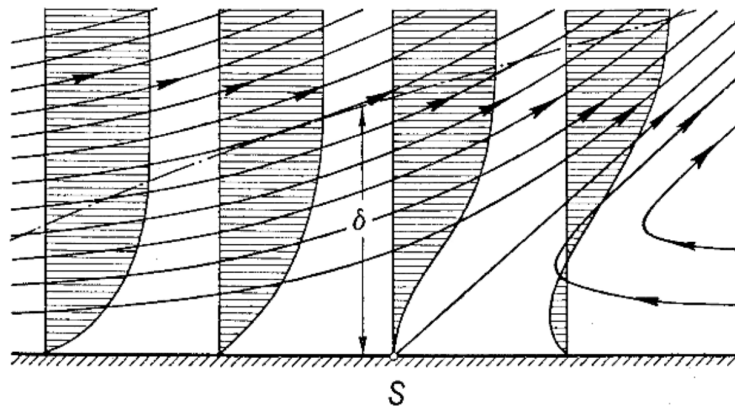
Gambaran aliran lapisan batas yang menunjukkan separasi terlihat pada Gambar 2.2. Sebagai akibat adanya aliran balik pada permukaan dinding, ketebalan lapisan batas  $\delta$  semakin membesar dan massa fluida pada lapisan batas mengalir menjauhi dinding. Pada titik separasi untuk aliran tunak, garis alir menjauhi permukaan dinding pada sudut tertentu. Posisi separasi terjadi pada kondisi dimana gradien kecepatan yang tegak lurus dengan dinding



Gambar 2.1: Skema separasi lapisan batas pada silinder sirkular

diabaikan atau tegangan geser pada dinding diabaikan (Schlichting, 2017)

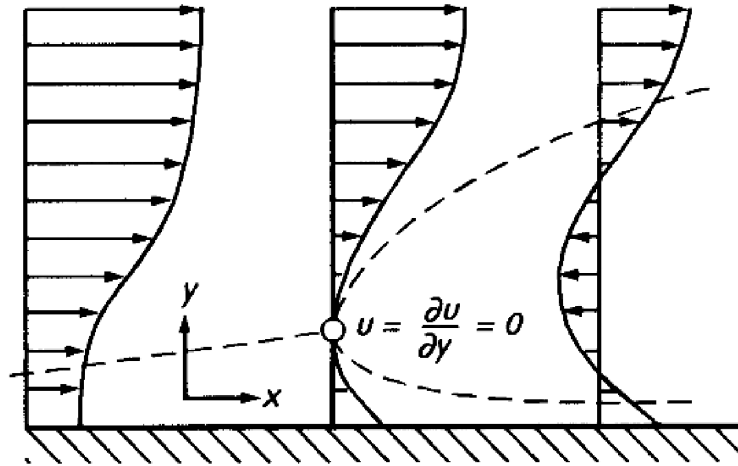
$$\tau_w = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (\text{separasi})$$



Gambar 2.2: Aliran lapisan batas menuju titik separasi

Kriteria titik separasi  $\tau_w = 0$  tidak berlaku untuk aliran tak tunak. Sebagai gantinya, kriteria MRS digunakan yang pada awalnya digunakan pada aliran lapisan batas tunak pada dinding yang bergerak. Kriteria ini dapat dilihat pada Gambar 2.3. Titik separasi terjadi pada titik dimana  $u = 0$  dan

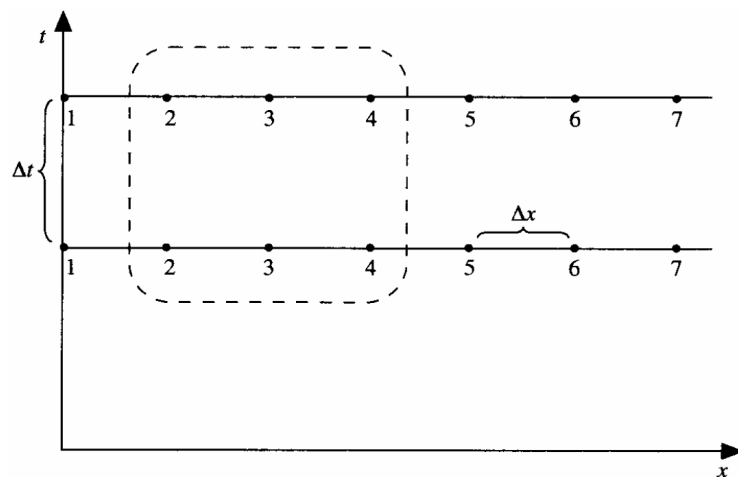
$\partial u / \partial y = 0$  (Schlichting, 2017).



Gambar 2.3: Kriteria MRS  $u = 0$  dan  $\partial u / \partial y = 0$

## 2.7 Metode Beda Hingga Skema Implisit

Salah satu pendekatan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan differensial adalah pendekatan implisit. Secara definisi, pendekatan implisit adalah suatu pendekatan dimana variabel yang tidak diketahui dapat diperoleh dari solusi simultan persamaan beda yang diterapkan pada setiap titik grid pada waktu tertentu (Anderson, 1995). Skema untuk pendekatan implisit dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4: Skema implisit

Untuk lebih jelasnya, misal diberikan persamaan panas untuk satu



dimensi sebagai berikut.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

Dengan menggunakan beda maju untuk  $\partial T / \partial t$  dan nilai rata-rata untuk  $\partial^2 T / \partial x^2$ , persamaan 2.8 menjadi

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t / 2} = \alpha \frac{\frac{1}{2} (T_{i+1}^{n+1} + T_{i+1}^n) - \frac{1}{2} (2T_i^{n+1} + 2T_i^n) + \frac{1}{2} (T_{i-1}^{n+1} + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \quad (2.9)$$

Persamaan 2.9 diselesaikan secara simultan untuk memperoleh  $T_i^{n+1}$  untuk setiap  $i$ . Nilai  $T_i^{n+1}$  yang tidak diketahui dikumpulkan di ruas kiri sedangkan  $T_i^{n+1}$  dikumpulkan di ruas kanan sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \Delta t}{2 (\Delta x)^2} T_{i-1}^{n+1} - \left[ 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_i^{n+1} + \frac{\alpha \Delta t}{2 (\Delta x)^2} T_{i+1}^{n+1} \\ = -T_i^n - \frac{\alpha \Delta t}{2 (\Delta x)^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Persamaan 2.10 direduksi menjadi

$$AT_{i-1}^{n+1} - BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = K_i$$

dimana

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha \Delta t}{2 (\Delta x)^2} \\ B &= 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \\ K_i &= -T_{i,j}^n - \frac{\alpha}{2 (\Delta y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

Misalkan  $T_1$  dan  $T_7$  merupakan kondisi batas, berdasarkan Gambar 2.4, persamaan beda untuk titik grid 2 ditulis sebagai

$$-BT_3 + AT_4 = K'_2$$

dengan  $K'_2 = K_2 - AT_1$  dimana  $T_1$  merupakan kondisi batas. Untuk grid yang

lain, persamaan beda ditulis

$$\text{Untuk grid 3} \quad AT_2 - BT_3 + AT_4 = K_3$$

$$\text{Untuk grid 4} \quad AT_3 - BT_4 + AT_5 = K_4$$

$$\text{Untuk grid 5} \quad AT_4 - BT_5 + AT_6 = K_5$$

Karena  $T_7$  merupakan suatu batas, maka persamaan beda untuk grid 6 ditulis

$$AT_5 - BT_6 = K'_6$$

dengan  $K'_6 = K_6 - AT_7$ . Dari sistem persamaan tersebut, matriks tridiagonal dapat diperoleh seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} -B & A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & A & 0 & 0 \\ 0 & A & -B & A & 0 \\ 0 & 0 & A & -B & A \\ 0 & 0 & 0 & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K'_6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, matriks tersebut diselesaikan dengan algoritma Thomas.

## 2.8 Validasi Model

Berkaitan dengan validasi model, suatu model dikatakan valid jika model tersebut mampu menyediakan informasi perubahan yang cukup dekat dari sistem pada kehidupan nyata terhadap model yang diperoleh dari hasil eksperimen sistem tersebut. Langkah-langkah membangun suatu model yang baik adalah sebagai berikut (Bellomo, dkk., 2007).

1. Sistem pada kehidupan nyata dimodelkan dengan persamaan mampu mewakili perubahan variabel bergantung terhadap variabel bebas.
2. Masalah matematika dikembangkan dengan menghubungkan semua kondisi model yang penting untuk solusi masalah tersebut.
3. Masalah di atas mungkin dapat diselesaikan dan hasilnya dapat dibandingkan dengan penelitian lainnya.
4. Jika jarak (berdasarkan konsep terdefinisi baik dalam matematika) antara simulasi dan penelitian sebelumnya kurang dari suatu nilai kritis, maka model dapat dikatakan valid, selain itu membutuhkan revisi.

## BAB 3

### METODE PENELITIAN

Secara rinci, desain, metode dan tempat penelitian dijelaskan sebagai berikut.

#### 3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Mengkaji model matematika aliran fluida tak tunak lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola.

Setiap model mempunyai karakteristik tertentu sehingga untuk mengembangkan model perlu dikaji terlebih dahulu dalam kaitan untuk mendapatkan model yang sesuai dengan yang diharapkan.

2. Mengkaji model matematika aliran fluida tak tunak pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.

Pada tahap ini dikaji beberapa model aliran fluida tak tunak pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola yang telah dihasilkan dari peneliti sebelumnya di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.

3. Mengembangkan model aliran fluida tak tunak panas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola bermagnet di bawah pengaruh konveksi campuran menggunakan hukum-hukum fisika.

4. Menyelesaikan model matematika dari aliran fluida tak tunak dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola bermagnet di bawah pengaruh konveksi campuran dengan metode beda hingga skema implisit.

Pada tahap ini akan diselesaikan secara numerik permasalahan aliran fluida magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui melalui suatu benda di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.

5. Membuat algoritma program.

Pada tahap ini, model akan diselesaikan secara numerik pada permasalahan aliran fluida tak tunak dari magnetohidrodinamik fluida

kental yang melalui bola bermagnet di bawah pengaruh konveksi campuran.

6. Membuat program.

Algoritma yang telah dibuat diimplementasikan dalam bentuk program dengan menggunakan Matlab.

7. Menjalankan program dan simulasi.

Program yang telah dibuat dijalankan dengan memasukkan inputan berupa nilai-nilai parameter dan dibandingkan dengan data eksperimen peneliti sebelumnya, selanjutnya dianalisis hasil numeriknya.

8. Verifikasi hasil program.

Tahap pembangunan model matematika dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola bermagnet di bawah pengaruh konveksi campuran sampai pada hasil output program diverifikasi kembali.

9. Analisis hasil dan pembahasan.

Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas dari magnetohidrodinamik fluida kental yang melalui bola bermagnet di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet. Selanjutnya dibuat kesimpulan dari hasil penelitian.

10. Publikasi hasil penelitian

Hasil penelitian akan dipublikasikan dalam bentuk artikel pada jurnal internasional.

11. Penyusunan tesis

Model matematika yang telah dibuat dan hasil penyelesaian model matematika pada penelitian ini disusun dan ditulis berdasarkan panduan yang berlaku di Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Data Sains.

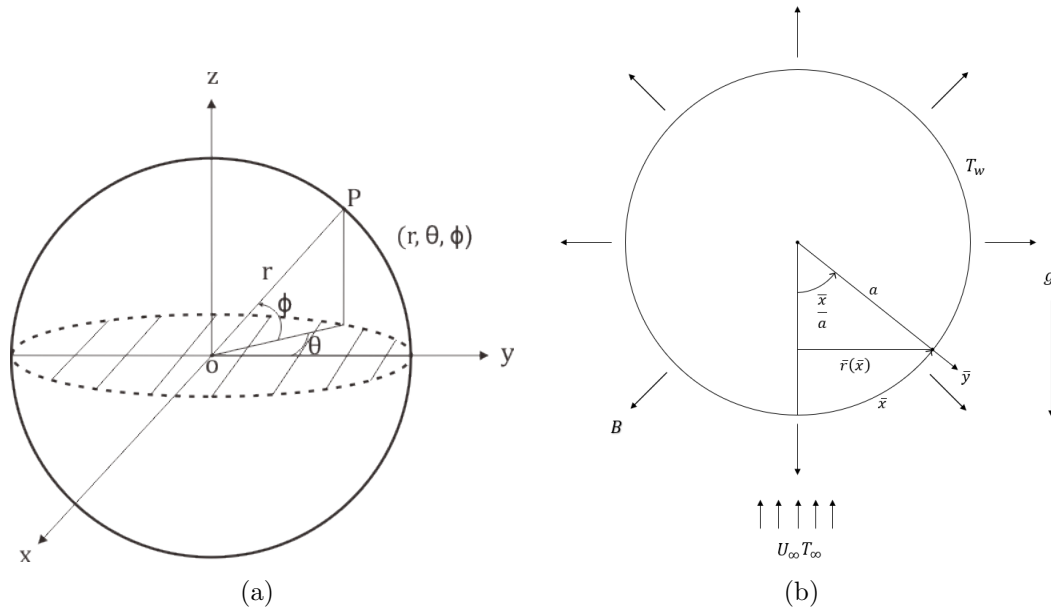
### **3.2 Tempat Penelitian**

Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

## BAB 4

### MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini, akan dijelaskan pembentukan model matematika dari konveksi campuran pada magnetohidrodinamik tak tunak untuk fluida kental yang mengalir melalui bola bermagnet. Model matematika yang dimensional, ditransformasikan ke bentuk model matematika yang non-dimensional. Konsep lapisan batas dan fungsi alir juga digunakan untuk mengubah model tersebut. Setelah itu, model tersebut dibentuk ke dalam persamaan similaritas.



Gambar 4.1: (a) Koordinat bola, (b) koordinat bola dalam dua dimensi

Bola merupakan benda dalam dimensi tiga. Dalam penelitian ini, koordinat bola dalam dimensi tiga diubah menjadi dimensi dua. Hal ini dikarenakan bola dapat dipandang sebagai lingkaran pada dimensi dua.  $\theta$  pada Gambar 4.1(a) berkorelasi dengan  $\bar{x}$  pada Gambar 4.1(b),  $r$  dengan  $\bar{y}$  dan  $\Phi$  dengan  $z$ . Sumbu  $-\bar{x}$  diukur dalam derajat pada sepanjang permukaan bola dari titik stagnasi terendah  $x = 0^\circ$  sampai titik stagnasi tertinggi  $x = 180^\circ$ . Sumbu  $-\bar{y}$  diukur terhadap sumbu normal dari permukaan bola kemudian menjauhinya. Sumbu  $-z$  dianggap nol karena penelitian ini hanya pada dua

dimensi.

Fluida yang digunakan dalam penelitian ini bersifat kental, artinya fluida tersebut termasuk fluida Newtonian. Aliran fluida pada penelitian ini mengalir secara seragam dari bawah ke atas, tak tunak, dan laminar dua dimensi serta tidak bermagnet. Fluida yang mengalir akan melalui bola bermagnet magnet sehingga semakin jauh posisi element fluida, semakin berkurang medan magnet yang diterima. Selain itu, tidak ada tegangan pada fluida sehingga medan magnet bernilai nol. Ilustrasi penelitian ini digambarkan seperti pada Gambar 4.1(b).

Pada Gambar 4.1(b), kecepatan dan temperatur fluida sebelum melalui bola bermagnet adalah  $U_\infty$  dan  $T_\infty$ . Akan tetapi, temperatur fluida di sekitar permukaan bola bermagnet disimbolkan dengan  $T_w$ . Fluida yang mengalir melalui bola bermagnet menimbulkan lapisan batas. Pada lapisan inilah perilaku fluida dipelajari.

#### 4.1 Persamaan Pembangun

Sebelum membentuk persamaan pembangun, kami akan mengenalkan notasi yang sering digunakan dalam persamaan fluida, yaitu derivatif substansial. Pergerakan fluida digambarkan seperti pada Gambar 4.2. Vektor unit pada sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$  dituliskan sebagai  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{k}$  sehingga vektor kecepatan fluida dituliskan sebagai

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

dimana komponen kecepatan  $x$ ,  $y$  dan  $z$  dituliskan sebagai

$$u = u(x, y, z, t)$$

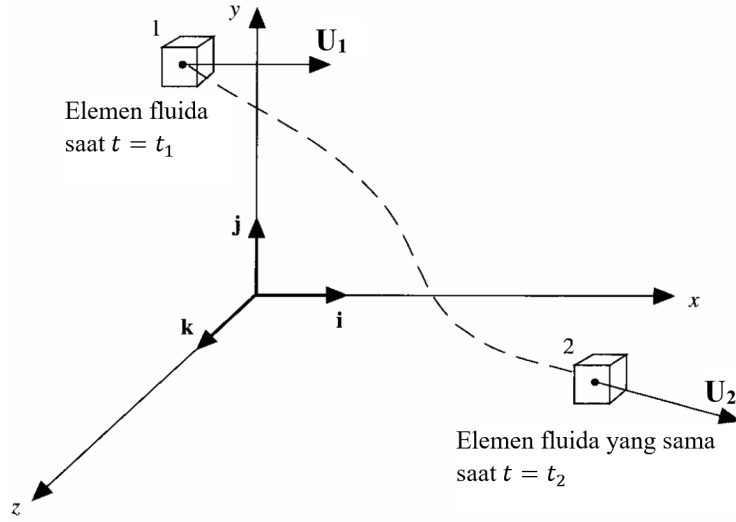
$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

Di sisi lain, densitas elemen fluida  $\rho$  dituliskan sebagai

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Misalkan pada saat  $t = t_1$ , densitas elemen fluida seperti pada gambar Gambar 4.2 dituliskan sebagai  $\rho_1 = \rho(x, y, z, t)$  dan pada saat  $t = t_2$  untuk elemen fluida yang sama, densitas elemen fluida dituliskan sebagai  $\rho_2 = \rho(x, y, z, t)$ . Dengan



Gambar 4.2: Ilustrasi derivatif substansial

melakukan ekspansi deret Taylor pada  $\rho_1$  untuk mendekati  $\rho_2$ , maka

$$\begin{aligned} \rho_2 = & \rho_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 (x_2 - x_1) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 (y_2 - y_1) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 (z_2 - z_1) \\ & + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 (t_2 - t_1) + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2, \Delta t^2) \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas, bagi kedua ruas dengan  $t_2 - t_1$  sehingga diperoleh

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \quad (4.1)$$

Ketika  $t_2$  mendekati  $t_1$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} & \equiv \frac{D\rho}{Dt} \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} & \equiv u \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} & \equiv v \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} & \equiv w \end{aligned}$$

sehingga persamaan 4.1 menjadi

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (4.2)$$

Dari persamaan 4.2, derivatif substansial didefinisikan sebagai

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.3)$$

atau ditulis sebagai

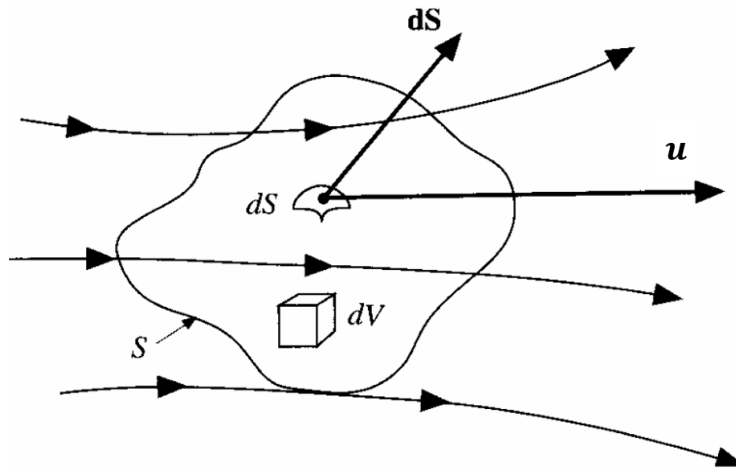
$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (4.4)$$

Perhatikan persamaan 4.4,  $D/Dt$  disebut derivatif substansial.  $\partial/\partial t$  disebut derivatif lokal yang berarti laju perubahan pada suatu titik yang tetap, sedangkan  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  disebut derivatif konvektif yang berarti laju perubahan yang diakibatkan perpindahan elemen fluida.

Hukum-hukum yang digunakan untuk mendapatkan persamaan pembangun seperti persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi adalah konservasi massa, Hukum II Newton dan Hukum I Termodinamika.

#### 4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Ada beberapa model yang digunakan untuk membangun persamaan kontinuitas. Dalam penelitian ini, model yang digunakan adalah model volume kontrol berhingga pada ruang yang tetap dan model elemen kecil pada ruang yang tetap.



Gambar 4.3: Model volume kontrol pada ruang yang tetap

Model volume kontrol pada ruang yang tetap digambarkan pada Gambar 4.3. Pada kontrol permukaan, kecepatan fluida disimbolkan dengan  $\mathbf{u}$ , vektor luas permukaan disimbolkan dengan  $d\mathbf{S}$ , dan volume kontrol fluida



disimbolkan dengan  $dV$ . Prinsip dasar fisika untuk konservasi massa pada model ini (Anderson, 1995) berarti

$$\begin{array}{l} \text{Jumlah massa yang mengalir} \\ \text{keluar pada kontrol volume dari} \\ \text{permukaan } S \end{array} = \begin{array}{l} \text{laju berkurangnya} \\ \text{massa fluida dari} \\ \text{volume kontrol} \end{array} \quad (4.5)$$

Massa suatu elemen fluida yang mengalir melalui sembarang permukaan tetap sama dengan hasil kali dari densitas fluida  $\rho$ , luas permukaan  $dS$  dan komponen kecepatan yang tegak lurus dengan permukaan  $u_n$  sehingga

$$\rho u_n dS = \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.6)$$

Perhatikan bahwa arah  $d\mathbf{S}$  dan  $\mathbf{u}$  sehingga  $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  bernilai positif. Aliran yang keluar dari volume kontrol ini disebut aliran keluar. Di sisi lain, aliran yang masuk menuju volume kontrol disebut aliran masuk sehingga  $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  bernilai negatif. Jadi, massa yang mengalir keluar dari permukaan  $S$  adalah jumlahan dari massa suatu elemen fluida pada persamaan 4.6 sehingga ruas kiri pada persamaan 4.5 adalah

$$\iint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.7)$$

Total massa yang termuat di dalam volume elemen  $dV$  adalah  $\rho dV$ . Akibatnya, laju berkurangnya massa fluida dari volume kontrol pada persamaan 4.5 adalah

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \quad (4.8)$$

Persamaan 4.7 dan 4.8 disubstitusikan pada persamaan 4.5 sehingga

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.9)$$

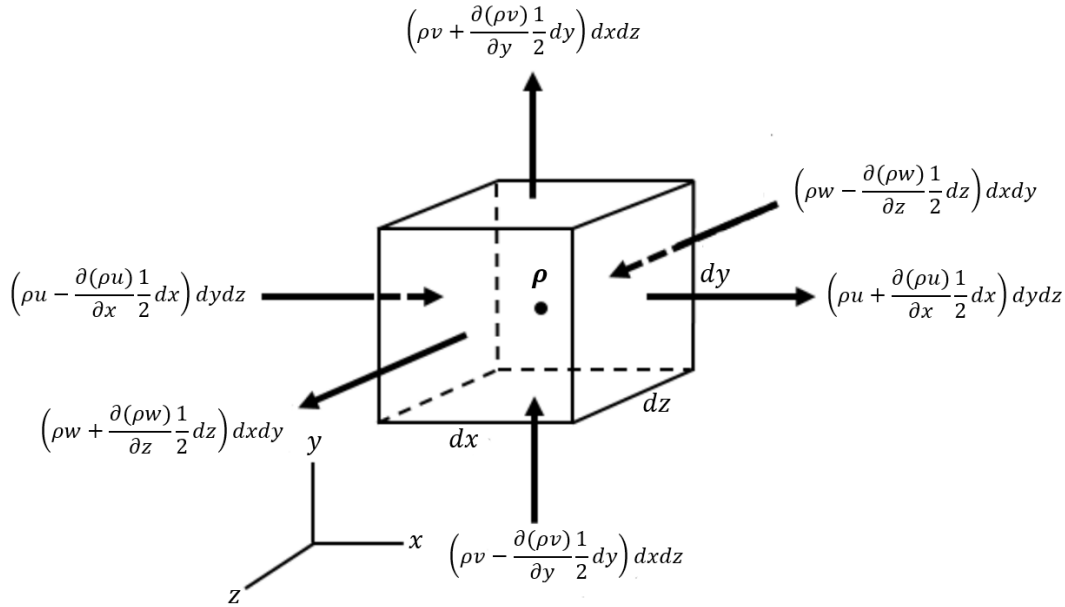
Dengan menerapkan teorema Gauss, integral permukaan pada persamaan 4.9 dapat diubah menjadi

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0$$

atau

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (4.10)$$

Misalkan model yang digunakan adalah model elemen kecil pada ruang yang tetap seperti pada Gambar 4.4. Perhatikan sisi kiri dan kanan yang tegak lurus pada sumbu  $x$ . Aliran massa yang masuk pada sumbu  $x$  adalah  $(\rho u - (\partial(\rho u)/\partial x)dx)dy dz$ , sedangkan aliran massa yang keluar pada sumbu  $x$  adalah  $(\rho u + (\partial(\rho u)/\partial x)dx)dy dz$ . Dengan cara yang sama, dapat diperoleh aliran massa yang masuk dan keluar pada sumbu  $y$  dan  $z$ . Jika aliran massa yang keluar disimbolkan dengan tanda positif, maka diperoleh



Gambar 4.4: Aliran fluida yang keluar-masuk pada model elemen kecil yang tetap

aliran massa yang keluar pada arah  $-x$

$$\left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz - \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

aliran massa yang keluar pada arah  $-y$

$$\left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} dy \right) dx dz - \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} dy \right) dx dz = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz$$

dan aliran massa yang keluar pada arah  $-z$

$$\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} dz\right) dx dy - \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} dz\right) dx dy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

Jadi, aliran massa yang keluar dari elemen kecil yang tetap adalah

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (4.11)$$

Total massa fluida dalam elemen yang kecil adalah  $\rho dx dy dz$  sehingga laju berkurangnya massa fluida dalam elemen kecil yang tetap adalah

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (4.12)$$

Dari persamaan 4.11 dan 4.12, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

atau dituliskan sebagai

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (4.14)$$

Perhatikan persamaan 4.14.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

Karena dalam penelitian ini fluida diasumsikan *incompressible* yang berarti  $D\rho/Dt = 0$ , maka

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.15)$$

#### 4.1.2 Persamaan Momentum

Persamaan momentum diperoleh dari penerapan Hukum II Newton yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum dari elemen fluida sama dengan jumlah gaya yang bekerja pada elemen tersebut (Versteeg dan

(Malalasekera, 2007) sehingga jika dituliskan dalam bentuk integral dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{u} dV + \iint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{dS} = \iiint_V \mathbf{F} dV \quad (4.16)$$

Integral permukaan pada persamaan di atas dapat diubah dengan menggunakan teorema Gauss, persamaan 4.16 dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \iiint_V \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} dV &= \iiint_V \mathbf{F} dV \\ \rho \left( \iiint_V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV \right) &= \iiint_V \mathbf{F} dV \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

maka persamaan 4.16 menjadi

$$\begin{aligned} \rho \left( \iiint_V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dV \right) &= \iiint_V \mathbf{F} dV \\ \rho \left( \iiint_V \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \right) &= \iiint_V \mathbf{F} dV \\ \left( \iiint_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \right) &= \iiint_V \mathbf{F} dV \end{aligned}$$

Jika ditulis dalam bentuk turunan, maka persamaan momentum dapat ditulis sebagai

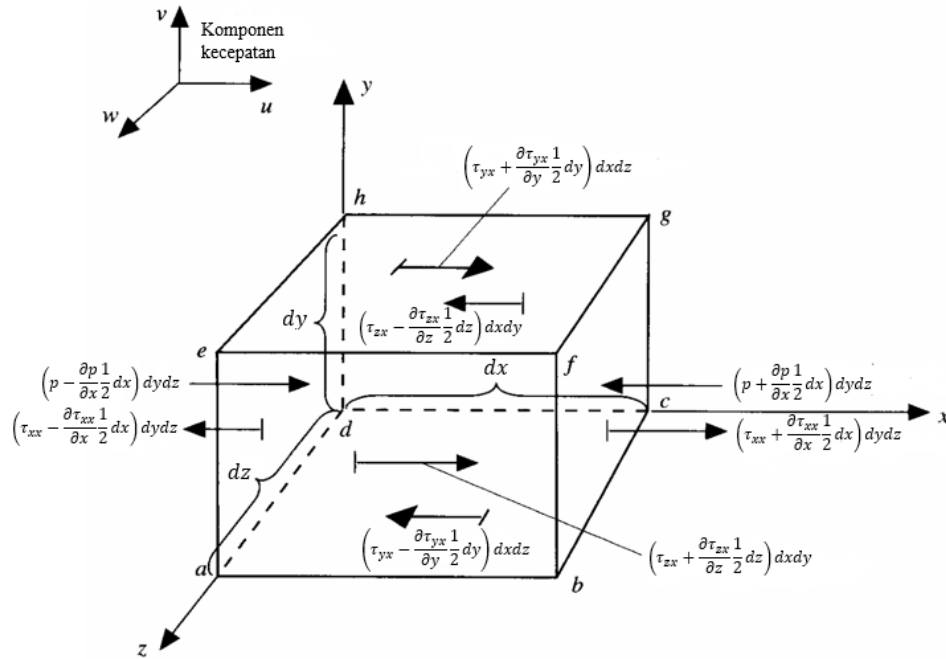
$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} \quad (4.17)$$

dimana  $\mathbf{F}$  adalah total gaya yang bekerja per unit volume. Gaya yang bekerja pada fluida dibedakan menjadi dua, yaitu gaya permukaan dan gaya body. Gaya permukaan  $\mathbf{F}_s$  merupakan gaya yang disebabkan oleh tekanan dan kekentalan. Sedangkan gaya body merupakan gaya yang bekerja langsung

pada fluida seperti gaya magnetik  $\mathbf{F}_m$  dan gaya apung  $\mathbf{F}_b$ .

### Gaya Permukaan

Gaya permukaan  $\mathbf{F}_s$  terjadi karena hasil interaksi dengan lingkungan sekitarnya. Gaya permukaan terbagi menjadi dua, yaitu tekanan dan kekentalan yang biasanya dibagi menjadi tegangan normal dan tegangan geser. Gaya permukaan diperoleh dengan memodelkan aliran massa suatu fluida yang mengalir melalui suatu elemen kecil pada suatu ruang yang tetap untuk komponen  $x$  seperti pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5: Model aliran fluida yang melalui elemen kecil pada ruang yang tetap

Pada sisi  $adhe$ , gaya yang bekerja adalah tekanan  $(p - (\partial p / \partial x) dx / 2) dy dz$  dengan arah positif dan tegangan normal  $(\tau_{xx} - (\partial \tau_{xx} / \partial x) dx / 2) dy dz$  dengan arah negatif. Pada sisi  $bcgf$ , gaya yang bekerja adalah tekanan  $(p + (\partial p / \partial x) dx / 2) dy dz$  dengan arah negatif dan tegangan normal  $(\tau_{xx} + (\partial \tau_{xx} / \partial x) dx / 2) dy dz$  dengan arah positif. Dengan penjelasan yang hampir sama untuk sisi yang lain, maka gaya permukaan untuk komponen  $x$  dapat ditulis sebagai

$$F_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (4.18)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti cara untuk mendapatkan gaya

permukaan pada komponen  $x$ , maka gaya permukaan untuk komponen  $y$  dan  $z$  adalah

$$F_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (4.19)$$

$$F_{sz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (4.20)$$

Tegangan normal dan tegangan geser (Anderson, 1995) dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{yx} &= \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yy} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{zz} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Komponen yang bekerja pada penelitian ini hanya pada komponen  $x$  dan  $y$  sehingga fluida yang mengalir dari bawah ke atas tampak dari depan. Akibatnya, komponen  $z$  seolah-olah diabaikan. Dengan adanya hal ini, bukan hanya gaya geser saja yang dikerjakan pada komponen  $x$  dan  $y$ , melainkan gaya-gaya lain pembentuk persamaan momentum, dan persamaan energi. Fluida yang diteliti dalam penelitian ini adalah fluida *incompressible*, maka tegangan normal ditulis

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

Karena komponen  $z$  diabaikan, maka tegangan geser dari persamaan 4.18 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &= 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mu \nabla^2 u \end{aligned}$$

Akibatnya, gaya geser untuk komponen  $x$  pada persamaan 4.18 menjadi

$$F_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (4.21)$$

Dengan cara yang sama, gaya geser untuk komponen  $y$  dari persamaan 4.19 dapat ditulis sebagai

$$F_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (4.22)$$

Dari persamaan 4.21 dan 4.22, gaya permukaan  $\mathbf{F}_s$  untuk persamaan momentum dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{F}_s = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.23)$$

### Gaya Magnetik

Gaya magnetik didefinisikan sebagai (Hsiao, 2011)

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.24)$$

dimana  $\mathbf{B}$  adalah medan magnet dan  $\mathbf{J}$  adalah densitas arus yang dituliskan sebagai (Aydin dan Kaya, 2011)

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.25)$$

dengan  $\sigma$  adalah konduktivitas listrik,  $\mathbf{E}$  adalah medan listrik dan  $\mathbf{u}$  adalah kecepatan fluida. Dengan melakukan substitusi persamaan 4.25 ke dalam persamaan 4.24, maka diperoleh

$$\mathbf{F} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.26)$$

Karena dalam penelitian ini diasumsikan tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga tidak ada medan listrik (Turkyilmazoglu, 2013), maka persamaan 4.26 hanya tersisa gaya Lorentz atau magnetik yang ditulis sebagai menjadi

$$\mathbf{F}_m = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.27)$$

Diketahui bahwa  $\mathbf{B}$  merupakan total medan magnet yang dituliskan

sebagai

$$\mathbf{B} = B_0 + \mathbf{b}$$

dimana  $B_0$  adalah medan magnet yang diterapkan dan  $\mathbf{b}$  adalah induksi medan magnet. Selain itu, bilangan Reynolds magnetiknya kecil sehingga induksi magnet diabaikan (Makinde dan Aziz, 2010). Akibatnya medan magnet bernilai  $\mathbf{B} = B_0$ . Nilai konstanta medan magnet  $B_0$  dapat diterapkan pada sumbu  $-z$  (Zheng, dkk., 2012) sehingga

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \times \mathbf{B} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ vB_0 & -uB_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \\ &= -uB_0^2\mathbf{i} - vB_0^2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned}$$

Dalam penelitian ini, bola diasumsikan bermagnet yang berakibat semakin jauh posisi fluida dari magnet, maka medan magnet semakin menghilang. Kondisi bola bermagnet memberikan tanda negatif untuk gaya magnetik. Akibatnya, persamaan 4.27 ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= -(-uB_0^2\mathbf{i} - vB_0^2\mathbf{j}) \\ &= \sigma B_0^2\mathbf{u} \end{aligned} \tag{4.28}$$

### Gaya Apung

Gaya apung dari suatu fluida sama dengan berat fluida yang dipindahkan (Pritchard, 2011). Jika gaya apung dihitung secara volumetrik, maka persamaannya dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{F}_b = \rho \mathbf{g} \tag{4.29}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan 4.23, 4.28 dan 4.29 ke dalam persamaan 4.17, maka

$$\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \sigma B_0^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \tag{4.30}$$



Diketahui bahwa tekanan total (Leal, 1992) dituliskan sebagai

$$p = p_d + p_h$$

dimana  $p_d$  merupakan tekanan dinamik dan  $p_h$  merupakan tekanan hidrostatik sehingga

$$\nabla p = \nabla p_d + \nabla p_h$$

Karena gradien tekanan hidrostatik  $\nabla p_h = \rho_\infty \mathbf{g}$  dimana  $\rho_\infty$  merupakan densitas fluida, maka

$$\nabla p = \nabla p_d + \rho_\infty \mathbf{g} \quad (4.31)$$

Untuk selanjutnya,  $p_d$  ditulis  $p$ . Substitusi persamaan 4.31 ke persamaan 4.30 sehingga

$$\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \sigma B_0^2 \mathbf{u} - (\rho_\infty - \rho) \mathbf{g} \quad (4.32)$$

Pendekatan Boussinesq digunakan ketika berhubungan dengan konveksi alami dan campuran (Leal, 1992). Inti dari pendekatan ini adalah bahwa perbedaan temperatur fluida ( $T - T_\infty$ ) cukup kecil sehingga sifat fluida seperti densitas dapat didekati dengan temperatur di sekitarnya. Akibatnya

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty}{\rho} &= 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \\ \rho_\infty - \rho &= \rho\beta(T - T_\infty) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Jika persamaan 4.33 disubstitusikan ke dalam persamaan 4.32, maka persamaan momentum sebagai berikut ini.

$$\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \sigma B_0^2 \mathbf{u} - \rho\beta(T - T_\infty) \mathbf{g} \quad (4.34)$$

### 4.1.3 Persamaan Energi

Persamaan energi diperoleh dari Hukum I Termodinamika yang menyatakan bahwa ketika suatu sistem yang jumlah fluidanya tetap, berubah dari keadaan 1 menjadi keadaan 2, energi berubah dari  $E_1$  menjadi  $E_2$  yang dikarenakan perubahan energi yang berupa panas maupun usaha (Potter,

dkk., 2011). Secara umum, Hukum I Termodinamika ditulis sebagai

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (4.35)$$

atau dalam bentuk integral ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e \, dV + \iint_S \rho e \mathbf{u} \cdot \mathbf{dS} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.36)$$

dimana  $e$  adalah energi spesifik. Dengan mengubah integral permukaan dengan menggunakan teorema Gauss, persamaan 4.36 menjadi

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \frac{\partial e}{\partial t} \, dV + \iiint_V \rho \nabla \cdot e \mathbf{u} \, dV &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \rho \left( \iiint_V \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot e \mathbf{u} \right) \, dV \right) &= \dot{Q} - \dot{W} \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e \mathbf{u} &= e \cdot \nabla \mathbf{u} + e \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= e \cdot \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

maka persamaan 4.36 menjadi

$$\begin{aligned} \rho \left( \iiint_V \left( \frac{\partial e}{\partial t} + e \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \, dV \right) &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \rho \left( \iiint_V \frac{De}{Dt} \, dV \right) &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \iiint_V \rho \frac{De}{Dt} \, dV &= \dot{Q} - \dot{W} \end{aligned}$$

dimana  $\dot{Q}$  merupakan laju transfer energi yang melalui suatu permukaan dan  $\dot{W}$  merupakan laju usaha yang dilakukan. Sedangkan laju perubahan energi dari elemen fluida per unit volume dituliskan sebagai

$$\rho \frac{De}{Dt} \quad (4.37)$$

Entalpi untuk sembarang substansi didefinisikan sebagai (Versteeg dan Malalasekera, 2007)

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Persamaan energi sering kali dituliskan menjadi entalpi sehingga

$$\begin{aligned}\rho \frac{De}{Dt} &= \rho \left[ \frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] \\ &= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}\end{aligned}$$

Bentuk  $Dp/Dt$  sering kali diidentikkan dengan nol karena kondisi tekanan tetap sehingga  $Dp/Dt = 0$ . Karena penelitian ini fluida diasumsikan *incompressible*, maka

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} \quad (4.38)$$

Karena tekanan konstan dan usaha dituliskan sebagai perkalian antara tekanan dan volume, maka persamaan 4.35 menjadi

$$\begin{aligned}(E_2 - E_1) + p(V_2 - V_1) &= \Delta Q \\ (E_2 + pV_2) - (E_1 + pV_1) &= mC_p\Delta T\end{aligned}$$

Karena reaksi panas dituliskan sebagai

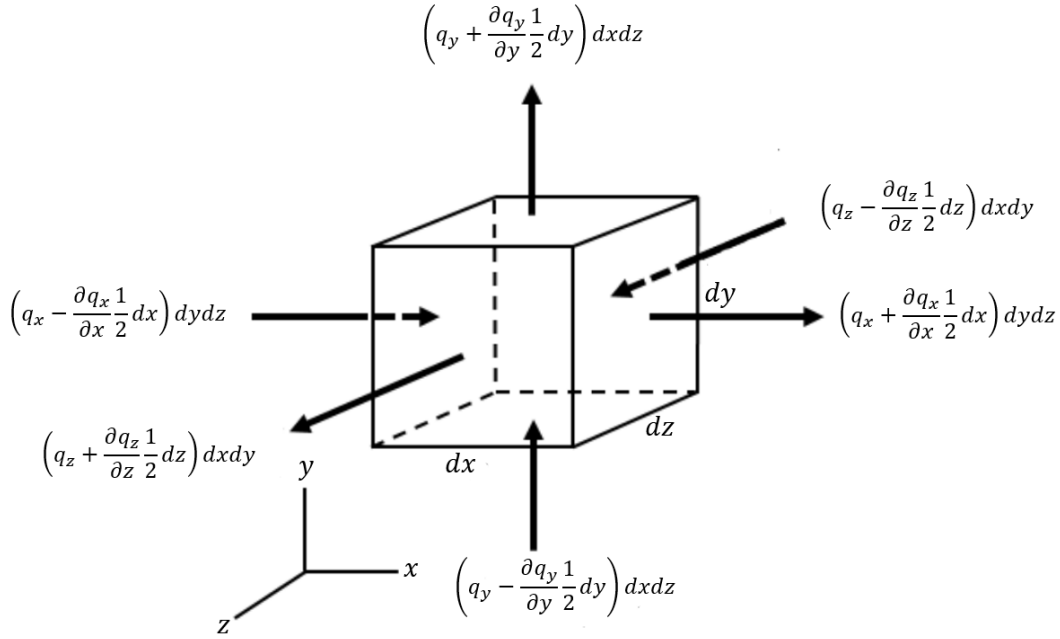
$$H = E + pV$$

maka

$$\begin{aligned}\Delta H &= mC_p\Delta T \\ \frac{\Delta H}{m} &= C_p\Delta T \\ \Delta h &= C_p\Delta T\end{aligned}$$

dimana  $h$  adalah entalpi,  $C_p$  adalah panas spesifik dan  $T$  adalah suhu sehingga persamaan 4.38 menjadi

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \quad (4.39)$$



Gambar 4.6: Laju pertambahan panas karena aliran fluida yang keluar-masuk

Laju pertambahan panas dapat diperoleh dengan menghitung perbedaan antara panas yang masuk dan panas yang keluar secara konduksi pada arah  $x$ ,  $y$  dan  $z$  sehingga laju pertambahan panas karena pada masing-masing arah dapat ditulis sebagai

$$\left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz \quad (4.40)$$

$$\left( q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} \frac{1}{2} dy \right) dx dz - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \frac{1}{2} dy \right) dx dz = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz \quad (4.41)$$

$$\left( q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} \frac{1}{2} dz \right) dx dy - \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \frac{1}{2} dz \right) dx dy = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz \quad (4.42)$$

Jadi, laju transfer panas dalam dua dimensi dapat dituliskan sebagai

$$\left( -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx dy dz = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) dx dy dz \quad (4.43)$$

Hukum Fourier untuk konduksi panas menghubungkan konduktivitas panas  $k$  dengan gradien temperatur lokal sehingga

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

Bentuk ini dapat ditulis

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Akibatnya, persamaan 4.43 dapat ditulis sebagai

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot (-k\nabla T) = k\nabla^2 T \quad (4.44)$$

Dalam penelitian ini, gaya yang bekerja pada fluida adalah gaya permukaan  $\mathbf{F}_s$ , gaya magnetik  $\mathbf{F}_m$  dan gaya apung  $\mathbf{F}_b$  sehingga menyebabkan perubahan kecepatan yang berakibat perubahan energi kinetik. Karena perubahan entalpi yang disebabkan oleh energi kinetik cukup kecil, maka laju usaha yang bekerja pada fluida sama dengan nol. Dari persamaan 4.39 dan 4.44, diperoleh persamaan energi yang ditulis sebagai

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k\nabla^2 T \quad (4.45)$$

Untuk membedakan dengan persamaan pembangun yang tidak berdimensi, persamaan pembangun yang berdimensi dituliskan menggunakan tanda bar seperti berikut ini.

### Persamaan kontinuitas

Dari persamaan kontinuitas dia atas, persamaan 4.15 dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \bar{r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \\ \bar{r} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \mathbf{j} \right) \cdot (\bar{u} \mathbf{i} + \bar{v} \mathbf{j}) &= 0 \\ \frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

dengan  $\bar{r} = a \sin(\bar{x}/a)$ .

### Persamaan momentum arah -x

Perhatikan persamaan 4.34 pada ruas kiri untuk arah x adalah

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)$$

Persamaan 4.21 untuk gaya permukaan untuk arah  $x$  adalah

$$F_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \nabla^2 \bar{u} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Persamaan 4.28 untuk gaya magnetik pada arah  $x$  adalah

$$F_{mx} = \sigma B_0^2 \bar{u}$$

Persamaan 4.33 untuk gaya apung pada arah  $x$  adalah

$$F_{bx} = \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} = -\rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)$$

Dari keempat persamaan tersebut, maka diperoleh persamaan momentum untuk arah  $x$  yang ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{u} \\ &+ \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

### **Persamaan momentum arah -y**

Perhatikan persamaan 4.34 pada ruas kiri untuk arah  $y$  adalah

$$\rho \frac{D\bar{v}}{D\bar{t}} = \rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)$$

Persamaan 4.22 untuk gaya permukaan untuk arah  $y$  adalah

$$F_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \nabla^2 \bar{v} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Persamaan 4.28 untuk gaya magnetik pada arah  $y$  adalah

$$F_{ey} = \sigma B_0^2 \bar{v}$$

Persamaan 4.33 untuk gaya apung pada arah  $y$  adalah

$$F_{by} = \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} = \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \cos \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)$$

Dari keempat persamaan tersebut, maka diperoleh persamaan momentum

untuk arah  $y$  yang ditulis sebagai berikut.

$$\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \cos \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \quad (4.48)$$

### Persamaan energi

Perhatikan bahwa persamaan 4.45 dapat ditulis sebagai

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.49)$$

dengan kondisi batas

saat  $\bar{t} < 0$ ,  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ ,  $\bar{T} = T_\infty$  untuk setiap  $\bar{x}$  dan  $\bar{y}$

saat  $\bar{t} \geq 0$ ,  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ ,  $\bar{T} = T_w$ , untuk  $\bar{y} = 0$

$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x})$ ,  $\bar{T} = T_\infty$  saat  $\bar{y} \rightarrow \infty$

#### 4.1.4 Transformasi Variabel Tak Berdimensi

Persamaan pembangun yang masih dimensional variabelnya diubah menjadi tak berdimensi untuk mempermudah komputasi. Variabel tak berdimensi yang digunakan dalam permasalahan ini adalah sebagai berikut.

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, r = \frac{\bar{r}}{a}, t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}$$

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty}, p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

dimana  $Re$  adalah bilangan Reynolds yang dituliskan sebagai

$$Re = \frac{\rho U_\infty a}{\mu}$$

dengan densitas  $\rho$ , kecepatan fluida  $U_\infty$  dan panjang karakteristik  $a$ . Misalkan difusivitas viskositas dituliskan sebagai  $\nu = \mu/\rho$ , maka bilangan Reynolds dapat ditulis sebagai

$$Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$$

sehingga diperoleh persamaan pembangun dalam bentuk nondimensional, yaitu

**Persamaan kontinuitas**

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

**Persamaan momentum arah -x**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Mu} + \text{RiT} \sin x \quad (4.51)$$

**Persamaan momentum arah -y**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Re}} \text{Mv} \\ & - \frac{\text{RiT}}{\text{Re}^{1/2}} \cos x \end{aligned} \quad (4.52)$$

**Persamaan energi**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.53)$$

Karena variabel dimensional sudah diubah menjadi variabel nondimensional, maka kondisi batas menjadi

saat  $t < 0$ ,  $u = v = 0$ ,  $T = 0$  untuk setiap  $x$  dan  $y$

saat  $t \geq 0$ ,  $u = v = 0$ ,  $T = 1$  untuk  $y = 0$

$u = u_e(x)$ ,  $T = T_\infty$  saat  $y \rightarrow \infty$

dengan M, Ri, Gr dan Pr adalah parameter atau bilangan tak berdimensi yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \text{M} &= \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \\ \text{Ri} &= \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \\ \text{Gr} &= \frac{g\beta(T_W - T_\infty)a^3}{\nu^2} \\ \text{Pr} &= \frac{\nu \rho C_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned}$$

dimana difusivitas panas  $\alpha = k/(\rho C_p)$  dan



- M : parameter magnetik  
 Ri : bilangan Richardson (parameter konveksi campuran)  
 Gr : bilangan Grashof  
 Pr : bilangan Prandtl

#### 4.1.5 Teori Lapisan Batas

Pada lapisan batas, nilai viskositas kinematik mendekati nol  $\nu \rightarrow 0$  yang berakibat pada  $\text{Re} \rightarrow \infty$  sehingga  $1/\text{Re} = 0$ , maka

**Persamaan kontinuitas**

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.54)$$

**Persamaan momentum arah -x**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Mu} + \text{RiT} \sin x \quad (4.55)$$

**Persamaan momentum arah -y**

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.56)$$

**Persamaan energi**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.57)$$

Diketahui bahwa kecepatan aliran bebas ditulis sebagai

$$u_e = \frac{3}{2} \sin x \quad (4.58)$$

Dengan melakukan substitusi 4.58 pada persamaan 4.55, maka persamaan momentum arah -x dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + \text{Mu}_e + \text{RiT} \sin x$$

Karena kecepatan aliran bebas merupakan suatu fungsi terhadap  $x$ , maka semua turunan dari  $u_e$  kecuali terhadap  $x$  adalah

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0$$

Akibatnya, persamaan 4.55 menjadi

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Mu_e + RiT \sin x$$

Ketika  $T = 0$ , maka

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Mu_e \quad (4.59)$$

Persamaan 4.59 disubstitusikan ke persamaan 4.55 sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u - u_e) + RiT \sin x \quad (4.60)$$

#### 4.1.6 Fungsi Alir

Pada aliran dua dimensi, ada suatu fungsi yang menghubungkan kecepatan pada arah  $-x$  dan  $-y$  yang disebut fungsi alir. Dengan adanya fungsi ini, sistem persamaan menjadi lebih sederhana sehingga memudahkan komputasi. Fungsi alir dinyatakan sebagai (Nazar, dkk., 2002)

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.61)$$

Fungsi alir pada 4.61 memenuhi persamaan kontinuitas seperti berikut ini

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.62)$$

Dengan substitusi fungsi alir pada 4.61 ke persamaan 4.54, 4.60 dan 4.57, maka diperoleh

#### Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + RiT \sin x \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### Persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.64)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} \text{saat } t < 0, \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x \text{ dan } y \\ \text{saat } t \geq 0, \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ untuk } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= r(x)u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

#### 4.1.7 Persamaan Similaritas

Untuk memperoleh solusi untuk nilai  $t$  yang kecil, persamaan similaritas ditransformasi dengan variabel similaritas dalam *small time* dan *large time*. Variabel similaritas untuk *small time* dapat ditulis sebagai

$$\psi = t^{1/2}u_e(x)r(x)f(x, \eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}, \quad T = s(x, \eta, t)$$

sehingga persamaan 4.63 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - t M \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \\ - \frac{1}{u_e} \text{Rits} \sin x \end{aligned} \quad (4.65)$$

dan persamaan 4.64 menjadi

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right) \quad (4.66)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} \text{saat } t < 0, f &= \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 0 \text{ untuk setiap } x \text{ dan } \eta \\ \text{saat } t \geq 0, f &= \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ untuk } \eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 1, s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Di sisi lain, variabel similaritas untuk *large time* ditulis sebagai

$$\psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t), \quad Y = y, \quad T = S(x, Y, t)$$

sehingga persamaan 4.63 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) - M \left( \frac{\partial F}{\partial Y} - 1 \right) \\ - \frac{1}{u_e} \text{Ris} \sin x \end{aligned} \quad (4.67)$$

dan persamaan 4.64 menjadi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right) \quad (4.68)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, \quad S = 1 \text{ untuk } Y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = 1, \quad S = 0 \text{ saat } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Kondisi awal untuk persamaan 4.65 dan 4.66 diperoleh dengan substitusi  $t = 0$  pada persamaan tersebut sehingga kondisi awal untuk persamaan momentum

$$\begin{aligned} f &= \eta \text{erf} \left( \frac{\eta}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right) - 1 \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \text{erf} \left( \frac{\eta}{2} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right) \end{aligned}$$

dan persamaan energi

$$\begin{aligned} s &= 1 - \text{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Persamaan 4.65 dan 4.67 merupakan persamaan diferensial parsial

orde tiga sehingga harus diubah menjadi persamaan diferensial parsial orde dua untuk mempermudah mendapatkan matriks tridiagonal pada skema implisit. Selain itu, kecepatan dalam persamaan 4.69 dituliskan sebagai  $\partial f / \partial \eta$ . Diketahui bahwa

$$\begin{aligned} r &= a \sin x \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= a \cos x \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{3}{2} \sin x \\ \frac{\partial u_e}{\partial x} &= \frac{3}{2} \cos x \end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi nilai  $r$  dan  $u_e$  beserta turunanya pada persamaan 4.65 dan 4.67, maka diperoleh suatu model matematika yang mewakili fenomena yang diteliti dalam penelitian ini dalam bentuk persamaan momentum dan persamaan energi. Untuk *small time*, persamaan momentum dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \cos x \left( 1 - u^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} t \sin x \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - t M(u - 1) - \frac{2}{3} \text{Rit} s \end{aligned} \quad (4.69)$$

Sedangkan untuk persamaan energi, persamaan ini ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3 \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \cos x = \text{Pr} t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( u \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \quad (4.70)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} \text{saat } t < 0, \quad f = u = 0, \quad s = 0 \text{ untuk setiap } \eta \text{ dan } x \\ \text{saat } t \geq 0, \quad f = u = 0, \quad s = 1 \text{ untuk } \eta = 0 \\ u = 1, \quad s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dan kondisi awal

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ s &= 1 - \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{\text{Pr}}\right) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk *large time*, dengan memisalkan  $\partial F/\partial Y = U$ , maka persamaan 4.67 ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos x \left(1 - U^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y}\right) \\ = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left(U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x}\right) - M(U - 1) - \frac{2}{3} \text{Ris} \end{aligned} \quad (4.71)$$

dan persamaan 4.68 menjadi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3\text{Pr}F \frac{\partial S}{\partial Y} \cos x = \text{Pr} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right) \quad (4.72)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} F = U = 0, S = 1 \text{ untuk } Y = 0 \\ U = 1, S = 0 \text{ untuk } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

## BAB 5

### PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini, penyelesaian model matematika konveksi campuran pada magnetohidrodinamik tak tunak yang mengalir melalui bola bermagnet akan dijelaskan dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit. Untuk mendapatkan suatu solusi pada saat  $t + \Delta t$ , penyelesaian model matematika untuk permasalahan ini dilakukan hanya pada arah  $-\eta$  atau  $-y$ . Hal ini disebabkan oleh teori lapisan batas yang menghilangkan persamaan momentum arah  $-y$  serta kecepatan  $u$  didefinisikan sebagai turunan partial fungsi alir terhadap arah  $-y$ . Solusi kecepatan atau temperatur saat  $t + \Delta$  diselesaikan pada arah  $-\eta$  secara implisit. Untuk perubahan terhadap arah  $-x$  dari kecepatan atau temperatur, ditulis sebagai nilai kecepatan atau temperatur saat  $t$ . Hal ini juga berlaku pada nilai  $f$  untuk persamaan momentum maupun kecepatan, tetapi untuk temperatur pada persamaan momentum juga ditulis sebagai nilai saat  $t$ . Setelah itu, koefisien dibentuk matriks tridiagonal dan diselesaikan menggunakan algoritma Thomas. Hasil simulasi berupa profil kecepatan, temperatur, gesekan kulit dan bilangan Nusselt terhadap parameter magnetik  $M$ , bilangan Prandtl  $Pr$  dan bilangan Richardson  $Ri$ .

#### 5.1 Diskritisasi dan Linierisasi

Dalam penelitian ini, terdapat dua model matematika yang akan diselesaikan, yaitu untuk *small time* dan *large time*. Sebelum melakukan diskritisasi pada model tersebut, dituliskan bentuk umum diskritisasi dengan metode beda hingga pada turunan  $f$  terhadap  $\eta$  atau  $u = \partial f / \partial \eta$

$$u_{i,j}^n = \frac{1}{2\Delta\eta} (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n)$$

turunan  $u$  terhadap  $x$ ,  $\eta$  dan  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\Delta\eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} (3u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\Delta \eta^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)\end{aligned}$$

dan turunan  $s$  terhadap  $x$ ,  $\eta$  dan  $t$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} (3s_{i,j}^{n+1} - 4s_{i,j}^n + s_{i,j}^{n-1}) \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\Delta \eta^2} (s_{i,j+1}^n - 2s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n)\end{aligned}$$

Selain itu, dilakukan juga linierisasi untuk nilai  $f$ ,  $u$  dan  $s$  yang dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}f_{i,j}^{n+1} &= f_{i,j}^n + \Delta f_{i,j}^n \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta u_{i,j}^n \\ s_{i,j}^{n+1} &= s_{i,j}^n + \Delta s_{i,j}^n\end{aligned}$$

Dari hasil diskritisasi dan linierisasi pada nilai  $f$  dan turunannya terhadap  $\eta$ , maka

$$\frac{1}{2}\Delta f_{i,j-1}^n - 2\Delta f_{i,j}^n + \frac{3}{2}\Delta f_{i,j+1}^n = 2u_{i,j}^n\Delta\eta - (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \quad (5.1)$$

Kecepatan  $u$  didefinisikan sebagai  $u = \partial f / \partial \eta$ , maka tidak ada diskritisasi terhadap arah  $-x$ , tetapi hanya ada pada arah  $-\eta$ .

### 5.1.1 Model Matematika untuk *Small Time*

#### Persamaan momentum

Karena kecepatan  $u$  diperoleh dari turunan pertama  $f$  terhadap  $\eta$ , kecepatan  $u$  hanya diselesaikan pada arah  $-\eta$ . Pada arah ini, kecepatan  $u$  dicari pada saat  $t + \Delta t$ . Diskritisasi beda tengah turunan pada persamaan 4.69 terhadap  $\eta$  beserta variabel  $u$  untuk  $t + \Delta t$ . Setelah itu, linierisasi dilakukan sehingga didapatkan persamaan beda untuk  $\Delta u$  pada setiap  $j$  untuk  $i$  yang tetap saat  $n + 1$  yang ditulis sebagai berikut.

$$-(a_1)\Delta u_{i,j-1}^n + (a_2)\Delta u_{i,j}^n - (a_3)\Delta u_{i,j+1}^n = k_j \quad (5.2)$$



dengan

$$\begin{aligned}
(a_0) &= \frac{1}{4} \frac{\eta_j}{\Delta\eta} + \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta x \Delta\eta} (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta\eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(a_1) &= \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + (a_0) \\
(a_2) &= \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + 3t^{n+1}u_{i,j}^n \cos x - t^{n+1}M + 4(a_0) \\
(a_3) &= \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + 3(a_0) \\
k_j &= \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} \Delta u_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{\eta_j}{\Delta\eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\
&\quad + \frac{3}{2} t^{n+1} \cos x \left( 1 - (u_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta\eta} f_{i,j}^n (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) \\
&\quad - \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta\eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) \\
&\quad + t^{n+1}M (u_{i,j}^n - 1) + \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ris}_{i,j}^n
\end{aligned}$$

### Persamaan energi

Langkah selanjutnya adalah melakukan diskritisasi pada persamaan energi untuk *small time* pada arah  $-\eta$ . Proses diskritisasi terhadap semua turunan yang ada pada persamaan energi menggunakan 3 titik. Selain turunan terhadap  $-x$ , diskritisasi dilakukan untuk mencari temperatur  $s$  saat  $t + \Delta t$ . Setelah itu, proses linierisasi dilakukan pada persamaan tersebut. Persamaan beda untuk variabel  $\Delta s$  ditulis sebagai

$$-(b_1)\Delta s_{i,j-1}^n + (b_2)\Delta s_{i,j}^n - (b_3)\Delta s_{i,j+1}^n = l_j \quad (5.3)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(b_0) &= \frac{1}{4} \text{Pr} \frac{\eta_j}{\Delta\eta} + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta x \Delta\eta} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x \\
&\quad + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta\eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(b_1) &= \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + (b_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b_2) &= \frac{3}{2} \Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3t^{n+1} u_{i,j}^n \cos x + 4(b_0) \\
(b_3) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3(b_0) \\
l_j &= \frac{1}{2} \Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta t} \Delta s_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (s_{i,j+1}^n - 2s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&\quad + \frac{1}{4} \Pr \frac{\eta_j}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&\quad + \frac{3}{2} \Pr \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&\quad - \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \right)
\end{aligned}$$

### 5.1.2 Model Matematika untuk *Large Time*

Proses diskritisasi model matematika yang diperoleh untuk *large time* tidak jauh beda dengan proses diskritisasi model matematika untuk *small time*. Perbedaannya hanya ada pada suku kedua pada model serta ada variabel  $t$ . Selain itu, perbedaan terletak pada perbedaan simbol  $\eta$  dan  $Y$ .

#### Persamaan momentum

Karena perbedaan persamaan momentum untuk *small time* dan *large time* hanya ada sedikit, maka dengan sedikit memodifikasi persamaan momentum untuk *small time*, persamaan momentum untuk *large time* dapat diperoleh. Persamaan beda untuk persamaan momentum untuk *large time* dengan variabel  $\Delta u$  pada arah  $y$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$-(A_1)\Delta u_{i,j-1}^n + (A_2)\Delta u_{i,j}^n - (A_3)\Delta u_{i,j+1}^n = K_j \quad (5.4)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(A_0) &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta x \Delta \eta} (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(A_1) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + (A_0) \\
(A_2) &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3u_{i,j}^n \cos x - M + 4(A_0) \\
(A_3) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3(A_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_j = & \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \Delta u_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\
& + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - (u_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) \\
& - \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) \\
& + M(u_{i,j}^n - 1) + \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ris}_{i,j}^n
\end{aligned}$$

### Persamaan energi

Persamaan energi untuk *large time* juga memiliki bentuk yang hampir mirip dengan persamaan energi untuk *small time*. Bedanya hanya bentuk  $\eta$  yang diganti dengan  $Y$  serta suku kedua pada persamaan energi untuk *small time* tidak ada pada persamaan energi untuk *large time*. Akibatnya, persamaan beda pada persamaan energi untuk *large time* ditulis sebagai

$$-(B_1)\Delta s_{i,j-1}^n + (B_2)\Delta s_{i,j}^n - (B_3)\Delta s_{i,j+1}^n = L_j \quad (5.5)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(B_0) &= \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{1}{\Delta x \Delta \eta} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(B_1) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + (B_0) \\
(B_2) &= \frac{3}{2} \frac{\text{Pr}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3u_{i,j}^n \cos x + 4(B_0) \\
(B_3) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3(B_0) \\
L_j &= \frac{1}{2} \frac{\text{Pr}}{\Delta t} \Delta s_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (s_{i,j+1}^n - 2s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&+ \frac{3}{2} \frac{\text{Pr}}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&- \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \right)
\end{aligned}$$

### 5.1.3 Gesekan Kulit

Gesekan kulit merupakan salah satu komponen hambatan yang terjadi akibat aliran fluida terhadap obyek penghalang. Gesekan kulit disebabkan oleh kekentalan fluida yang terbentuk akibat perubahan aliran laminar menjadi aliran turbulen pada permukaan benda. Koefisien gesekan kulit lokal ( $C_f$ ) didefinisikan sebagai

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2 / 2} \quad (5.6)$$

dimana tegangan geser pada benda  $\tau_w$  ditulis sebagai

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \frac{2\mu}{\rho U_\infty^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} \\ &= \frac{2\mu}{\rho U_\infty^2} \left( \frac{\partial (u U_\infty)}{\partial (ay \text{Re}^{-1/2})} \right)_{y=0} \\ &= \text{Re}^{-1/2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} C_f \text{Re}^{1/2} &= 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= 2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Untuk *small time*, gesekan kulit lokal ditulis

$$\begin{aligned} C_f \text{Re}^{1/2} &= 2 \frac{1}{r} \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ &= \frac{3}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \sin x \\ &= \frac{3}{t^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \sin x \end{aligned} \quad (5.7)$$

sehingga diskritisasinya adalah

$$C_f \text{Re}^{1/2} = \frac{3}{\sqrt{t^n}} \frac{1}{\Delta \eta} (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) \sin x$$

Untuk *large time*, gesekan kulit lokal ditulis

$$\begin{aligned} C_f \text{Re}^{1/2} &= 2 \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ &= 3 \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \sin x \end{aligned}$$

Karena  $\partial F / \partial Y$  dimisalkan  $U$ , maka koefisien gesekan kulit ditulis sebagai

$$C_f \text{Re}^{1/2} = 3 \frac{\partial U}{\partial Y} \sin x \quad (5.8)$$

sehingga diskritisasinya adalah

$$C_f \text{Re}^{1/2} = \frac{3}{\Delta \eta} (U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n) \sin x$$

#### 5.1.4 Perpindahan Panas

Perpindahan panas dapat terjadi secara konduksi, konveksi dan radiasi. Berbicara tentang fluida yang mengalir melalui suatu benda, perpindahan panas yang terjadi hanya konduksi dan konveksi. Perpindahan panas antara fluida dan benda paling signifikan terjadi di sekitar benda tersebut. Perpindahan panas ini dapat dinyatakan sebagai bilangan Nusselt lokal yang didefinisikan sebagai

$$Nu_x = \frac{ha}{k} \quad (5.9)$$

dengan

$$h = \frac{-q_w}{(T_w - T_\infty)}$$

dan

$$q_w = k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
Nu_x &= -\frac{aq_w}{k(T_w - T_\infty)} \\
&= -\frac{a}{k(T_w - T_\infty)} k \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} \\
&= -\frac{a}{(T_w - T_\infty)} \left( \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ay \text{Re}^{-1/2})} \right)_{y=0} \\
&= -\frac{\text{Re}^{1/2}}{(T_w - T_\infty)} (T_w - T_\infty) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\text{Nu}_x \text{Re}^{-1/2} = - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.10)$$

Untuk *small time*, bilangan Nusselt lokal ditulis sebagai

$$\text{Nu}_x \text{Re}^{-1/2} = -\frac{1}{t^{1/2}} \left( \frac{\partial s}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

sehingga diskritisasinya

$$\text{Nu}_x \text{Re}^{-1/2} = -\frac{1}{t(n)^{1/2}} \frac{1}{\Delta \eta} (s_{i+1,j}^n - s_{i,j}^n)$$

sedangkan untuk *large time*, bilangan Nusselt lokal ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\text{Nu}_x \text{Re}^{-1/2} &= -1 \left( \frac{\partial S}{\partial Y} \right)_{Y=0} \\
&= -\frac{1}{\Delta Y} (S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n)
\end{aligned}$$

## 5.2 Algoritma Thomas

Misalkan persamaan beda 5.2 untuk menyelesaikan solusi saat  $t + \Delta t$  pada persamaan momentum adalah

$$-(a_1)\Delta u_{i,j-1}^n + (a_2)\Delta u_{i,j}^n - (a_3)\Delta u_{i,j+1}^n = k_j$$

Perhatikan bahwa kondisi batas

saat  $t \geq 0$ ,  $f = u = 0$ ,  $s = 1$  untuk  $\eta = 0$

$$u = 1, s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty$$

Misalkan jumlah partisi yang digunakan  $n\eta$ , maka terdapat  $n\eta + 1$  titik dengan  $n\eta$  titik yang tidak diketahui karena  $u_{0,j}^n = 0$  sehingga  $\Delta u_{i,0}^n = 0$ . Sedangkan untuk  $n\eta + 1$ , kecepatan  $u_{i,n\eta+1}^n \approx 1$  (belum tentu  $u_{i,n\eta+1}^n = 1$ ) untuk setiap  $i$ . Misalkan kecepatan  $u_{i,n\eta+2}^n = 1$ , maka  $\Delta u_{n\eta+2,j}^n = 0$ . Dari  $n\eta$  titik yang tidak diketahui dapat dibentuk sistem persamaan linier. Misalkan jumlah titik tersebut adalah  $n = n\eta$  dan konstanta untuk baris yang pertama dan terakhir adalah  $k_1$  dan  $k_N$ , maka sistem persamaan linier untuk  $i$  yang tetap saat  $t + \Delta t$  adalah

$$\begin{array}{rcl} (a_2)_1 \Delta u_1 - (a_3)_1 \Delta u_2 & & = k_1 \\ -(a_1)_2 \Delta u_1 + (a_2)_2 \Delta u_2 - (a_3)_2 \Delta u_3 & & = k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a_1)_{N-1} \Delta u_{N-2} + (a_2)_{N-1} \Delta u_{N-1} - (a_3)_{N-1} \Delta u_N & = & k_{N-1} \\ -(a_1)_N \Delta u_{N-1} + (a_2)_N \Delta u_N & = & k_N \end{array}$$

dengan nilai  $k_1, \dots, k_N$  yang berbeda. Hal ini dikarenakan untuk  $i = 0$  ( $x = 0^\circ$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3u_{i+2,j}^n - 4u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i+2,j}^n - 4f_{i+1,j}^n + f_{i,j}^n),\end{aligned}$$

untuk  $i = 1, \dots, M - 1$  ( $0^\circ < x < 180^\circ$ ) dimana  $M = nx + 1$  dan  $nx$  adalah jumlah partisi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n),\end{aligned}$$

dan untuk  $i = M$  ( $x = 180^\circ$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3u_{i,j}^n - 4u_{i-1,j}^n + u_{i-2,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i,j}^n - 4f_{i-1,j}^n + f_{i-2,j}^n) .\end{aligned}$$

Hal yang pertama dilakukan adalah mengeliminasi diagonal bawah pada sistem persamaan linier. Baris pertama dikalikan dengan  $(a_1)_2$  sehingga

$$-(a_1)_2(a_2)_1\Delta u_1 + (a_1)_2(a_3)_1\Delta u_2 = -(a_1)_2k_1$$

dan baris kedua dikalikan dengan  $(a_2)_1$  sehingga

$$-(a_2)_1(a_1)_2\Delta u_1 + (a_2)_1(a_2)_2\Delta u_2 - (a_2)_1(a_3)_2\Delta u_3 = (a_2)_1k_2$$

Dengan mengurangi baris kedua dengan baris pertama, maka baris kedua ditulis sebagai

$$\begin{aligned}((a_2)_1(a_2)_2 - (a_1)_2(a_3)_1)\Delta u_2 - (a_2)_1(a_3)_2\Delta u_3 &= (a_2)_1k_2 + (a_1)_2k_1 \\ \left((a_2)_2 - \frac{(a_1)_2(a_3)_1}{(a_2)_1}\right)\Delta u_2 - (a_3)_2\Delta u_3 &= k_2 + \frac{(a_1)_2}{(a_2)_1}k_1\end{aligned}$$

Misalkan

$$k'_2 = k_2 + \frac{(a_1)_2}{(a_2)_1}k_1$$

dan

$$(a_2)'_2 = (a_2)_2 - \frac{(a_1)_2(a_3)_1}{(a_2)_1}$$

maka

$$(a_2)'_2\Delta u_2 - (a_3)_2\Delta u_3 = k'_2$$

Proses ini dilakukan sampai baris ke- $N$  sehingga diagonal bawah tereliminasi. Dengan mengalikan  $-(a_1)_N$  untuk baris ke- $N - 1$ .

$$-(a_1)_N(a_2)'_{N-1}\Delta u_{N-1} + (a_1)_N(a_3)_{N-1}\Delta u_N = -(a_1)_Nk'_{N-1}$$



Untuk baris terakhir dikalikan dengan  $(a_2)'_{N-1}$  sehingga

$$-(a_2)'_{N-1}(a_1)_N \Delta u_{N-1} + (a_2)'_{N-1}(a_2)_N \Delta u_N = (a_2)'_{N-1} k_N$$

Dengan mengurangi baris ke- $N$  dengan baris ke- $N - 1$ , maka

$$\begin{aligned} ((a_2)'_{N-1}(a_2)_N - (a_1)_N(a_3)_{N-1}) \Delta u_N &= (a_2)'_{N-1}k_N + (a_1)_Nk'_{N-1} \\ \Delta u_N &= \frac{(a_2)'_{N-1}k_N + (a_1)_Nk'_{N-1}}{(a_2)'_{N-1}(a_2)_N - (a_1)_N(a_3)_{N-1}} \end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi nilai  $\Delta u_N$  ke dalam persamaan pada baris  $N-1$ , maka solusi untuk  $\Delta u_{N-1}$  juga diperoleh. Hal ini dilakukan sampai pada baris pertama sehingga solusi  $\Delta u_1$  diperoleh. Akibatnya, solusi untuk  $u_1$  saat  $t + \Delta t$  selanjutnya juga dapat diperoleh.

Sedangkan persamaan beda 5.3 untuk persamaan energi adalah

$$-(b_1)\Delta s_{i,j-1}^n + (b_2)\Delta s_{i,j}^n - (b_3)\Delta s_{i,j+1}^n = l_j$$

memiliki  $n\eta$  titik yang tidak diketahui dengan grid sebesar  $d\eta$ . Misal jumlah titik tersebut adalah  $N = n\eta + 1$  sehingga nanti ada  $N$  persamaan linier dengan  $l_1$  dan  $l_N$  adalah konstanta untuk baris pertama dan terakhir. Dari kondisi batas yang dijelaskan sebelumnya, diketahui bahwa  $\Delta s_{i,0}^n = 0$   $\Delta s_{i,N+1}^n = 0$ . Akibatnya, sistem persamaan linier untuk nilai  $i$  yang tetap adalah

$$\begin{array}{rcl}
(b_2)_1 \Delta s_1 - (b_3)_1 \Delta s_2 & & = l_1 \\
-(b_1)_2 \Delta s_1 + (b_2)_2 \Delta s_2 - (b_3)_2 \Delta s_3 & & = l_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
-(b_1)_{N-1} \Delta s_{N-2} + (b_2)_{N-1} \Delta s_{N-1} - (b_3)_{N-1} \Delta s_N & = & l_{N-1} \\
-(b_1)_N \Delta s_{N-1} + (b_2)_N \Delta s_N & = & l_N
\end{array}$$

Nilai konstanta  $l_1, \dots, l_N$  bisa berbeda karena bergantung pada  $i$ . Untuk  $i = 0$  ( $x = 0^\circ$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3s_{i+2,j}^n - 4s_{i+1,j}^n + s_{i,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i+2,j}^n - 4f_{i+1,j}^n + f_{i,j}^n),\end{aligned}$$

untuk  $i = 1, \dots, M - 1$  ( $0^\circ < x < 180^\circ$ ) dimana  $M = nx + 1$  dan  $nx$  adalah

jumlah partisi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n),\end{aligned}$$

dan untuk  $i = M$  ( $x = 180^\circ$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3s_{i,j}^n - 4s_{i-1,j}^n + s_{i-2,j}^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (3f_{i,j}^n - 4f_{i-1,j}^n + f_{i-2,j}^n).\end{aligned}$$

Hal yang pertama dilakukan adalah mengeliminasi diagonal bawah pada sistem persamaan linier. Baris pertama dikalikan dengan  $(b_1)_2$  sehingga

$$-(b_1)_2(b_2)_1\Delta s_1 + (b_1)_2(b_3)_1\Delta s_2 = -(b_1)_2l_1$$

dan baris kedua dikalikan dengan  $(b_2)_1$  sehingga

$$-(b_2)_1(b_1)_2\Delta s_1 + (b_2)_1(b_2)_2\Delta s_2 - (b_2)_1(b_3)_2\Delta s_3 = (b_2)_1l_2$$

Dengan mengurangi baris kedua dengan baris pertama, maka baris kedua ditulis sebagai

$$\begin{aligned}((b_2)_1(b_2)_2 - (b_1)_2(b_3)_1)\Delta s_2 - (b_2)_1(b_3)_2\Delta s_3 &= (b_2)_1l_2 + (b_1)_2l_1 \\ \left((b_2)_2 - \frac{(b_1)_2(b_3)_1}{(b_2)_1}\right)\Delta s_2 - (b_3)_2\Delta s_3 &= l_2 + \frac{(b_1)_2}{(b_2)_1}l_1\end{aligned}$$

Misalkan

$$l'_2 = l_2 + \frac{(b_1)_2}{(b_2)_1}l_1$$

dan

$$(b_2)'_2 = (b_2)_2 - \frac{(b_1)_2(b_3)_1}{(b_2)_1}$$

maka

$$(b_2)'_2\Delta s_2 - (b_3)_2\Delta s_3 = l'_2$$

Proses ini dilakukan sampai baris ke- $N$  sehingga diagonal bawah tereliminasi. Dengan mengalikan  $(b_1)_N$  untuk baris ke- $N - 1$ .

$$-(b_1)_N(b_2)'_{N-1}\Delta s_{N-1} + (b_1)_N(b_3)_{N-1}\Delta s_N = -(b_1)_N l'_{N-1}$$

Untuk baris terakhir dikalikan dengan  $(b_2)'_{N-1}$  sehingga

$$-(b_2)'_{N-1}(b_1)_N\Delta s_{N-1} + (b_2)'_{N-1}(b_2)_N\Delta s_N = (b_2)'_{N-1}l_N$$

Dengan mengurangi baris ke- $N$  dengan baris ke- $N - 1$ , maka

$$\begin{aligned} ((b_2)'_{N-1}(b_2)_N - (b_1)_N(b_3)_{N-1}) \Delta s_n &= (b_2)'_{N-1}l_N + (b_1)_N l'_{N-1} \\ \Delta s_N &= \frac{(b_2)'_{N-1}l_N + (b_1)_N l'_{N-1}}{(b_2)'_{N-1}(b_2)_N - (b_1)_N(b_3)_{N-1}} \end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi nilai  $\Delta s_N$  ke dalam persamaan pada baris  $N - 1$ , maka solusi untuk  $\Delta s_{N-1}$  juga diperoleh. Hal ini dilakukan sampai pada baris pertama sehingga solusi  $\Delta s_1$  diperoleh. Akibatnya, solusi untuk  $s_1$  saat  $t + \Delta t$  selanjutnya juga dapat diperoleh.

Persamaan beda untuk mencari nilai  $f$  seperti pada persamaan 5.1

$$\frac{1}{2}\Delta f_{i,j-1}^n - 2\Delta f_{i,j}^n + \frac{3}{2}\Delta f_{i,j+1}^n = 2u_{i,j}^n\Delta\eta - (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n)$$

Seperti halnya proses Algoritma Thomas pada penyelesaian persamaan momentum dan energi, penyelesaian untuk mencari nilai  $f$  juga menggunakan jumlah partisi yang sama, yaitu  $n\eta = N$ . Berdasarkan kondisi batas, nilai  $\Delta f_{i,0}^n = 0$ , tetapi  $\Delta f_{i,N+1}^n \neq 0$ . Akibatnya, koefisien untuk  $\Delta f_{N+1,j}^n$  dipindahkan untuk  $\Delta f_{N-1,j}^n$ . Selanjutnya, sistem persamaan linier untuk  $i$  yang tetap saat  $t + \Delta t$  adalah

$$\begin{aligned} -2\Delta f_1 + \frac{3}{2}\Delta f_2 &= (f_0)_1 \\ \frac{1}{2}\Delta f_1 - 2\Delta f_2 + \frac{3}{2}\Delta f_3 &= (f_0)_2 \\ \vdots &\vdots \\ \frac{1}{2}\Delta f_{N-2} - 2\Delta f_{N-1} + \frac{3}{2}\Delta u_N &= (f_0)_{N-1} \\ 4\Delta f_{N-1} - 2\Delta f_N &= (f_0)_N \end{aligned}$$

dimana untuk  $j = N$

$$(f_0)_N = 2u_{i,j}^n \Delta \eta - (3f_{i,j}^n - 4f_{i,j-1}^n + f_{i,j-2}^n)$$

dan untuk  $j = 1, \dots, N - 1$

$$(f_0)_j = 2u_{i,j}^n \Delta \eta - (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n)$$

Sama dengan proses Algoritma Thomas pada penyelesaian kecepatan dan temperatur, hal yang pertama adalah eliminasi diagonal bawah pada sistem persamaan linier untuk penyelesaian nilai  $f$ . Baris pertama dikalikan dengan  $\frac{1}{2}$  sehingga

$$-\Delta f_1 + \frac{3}{4} \Delta u_2 = \frac{1}{2} (f_0)_1$$

dan baris kedua dikalikan dengan  $-2$  sehingga

$$-\Delta f_1 + 4\Delta f_2 - 4\Delta f_3 = -2(f_0)_2$$

Baris kedua dikurangi baris pertama, maka

$$\frac{1}{4} \Delta f_2 - 4\Delta f_3 = -2(f_0)_2 - \frac{1}{2} (f_0)_1$$

Misalkan

$$(f_0)'_2 = -2(f_0)_2 - \frac{1}{2} (f_0)_1$$

dan

$$c_2 = \frac{1}{4} \quad \text{dan} \quad d_2 = 4$$

maka

$$c_2 \Delta f_2 - d_2 \Delta f_3 = (f_0)'_2$$

Proses ini dilakukan sampai baris ke- $N$  sehingga diagonal bawah tereliminasi.

Dengan mengalikan 4 untuk baris ke- $N - 1$ ,

$$4c_{N-1}\Delta f_{N-1} + 4d_{N-1}\Delta f_N = 4(f_0)'_{N-1}$$

Untuk baris terakhir dikalikan dengan  $c_{N-1}$ , maka

$$4c_{N-1}\Delta f_{N-1} - 2c_{N-1}\Delta f_N = c_{N-1}(f_0)_N$$

Kemudian baris ke- $N$  dikurangi oleh baris ke- $N - 1$ , maka

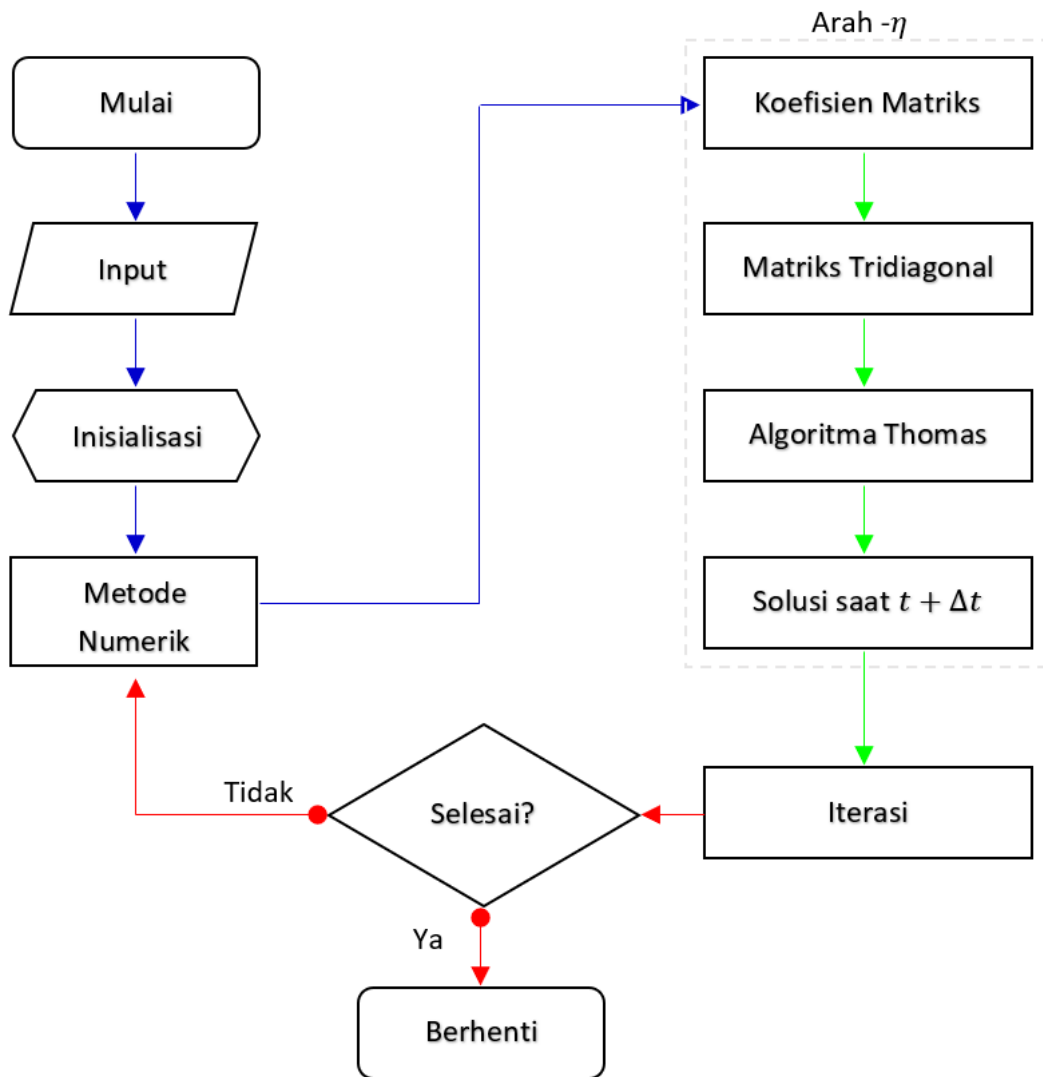
$$\begin{aligned} (-2c_{N-1} - 4d_{N-1})\Delta f_N &= c'_{N-1}(f_0)_N - 4(f_0)'_{N-1} \\ \Delta f_N &= \frac{c'_{N-1}(f_0)_N - 4(f_0)'_{N-1}}{-2c_{N-1} - 4d_{N-1}} \end{aligned}$$

Kemudian nilai  $\Delta f_N$  disubstitusikan ke dalam persamaan pada baris  $N - 1$  sehingga solusi untuk  $\Delta f_{N-1}$  diperoleh. Proses ini dilakukan sampai pada baris pertama sehingga solusi  $\Delta u_1$  diperoleh. Akibatnya, solusi untuk  $f_1$  saat  $t + \Delta t$  selanjutnya juga dapat diperoleh.

### 5.3 Algoritma

Algoritma suatu program dapat diwakili oleh suatu diagram alir, dimana diagram tersebut menampilkan proses kerja suatu program dengan menampilkan simbol-simbol dan urutannya dihubungkan dengan panah. Pada Gambar 5.1, diagram alir algoritma untuk menyelesaikan model matematika dari konveksi campuran pada magnetohidrodinamik tak tunak yang mengalir melalui bola bermagnet disajikan. Berikut ini penjelasan untuk diagram tersebut.

1. Input nilai
  - Memberikan masukan parameter pada program
  - Menghitung jumlah titik atau grid yang akan dicari
2. Inisialisasi
  - Menentukan syarat batas
  - Menentukan kondisi awal
3. Skema implisit
  - Mengganti penyelesaian turunan spasial dengan beda tengah pada turunan terhadap  $\eta$  atau variabel yang bersesuaian, kecuali turunan terhadap  $x$ , yang diselesaikan secara implisit
  - Menentukan koefisien matriks tridiagonal beserta konstanta
  - Menyelesaikan matriks menggunakan algoritma Thomas untuk nilai



Gambar 5.1: Diagram Alir Algoritma Program

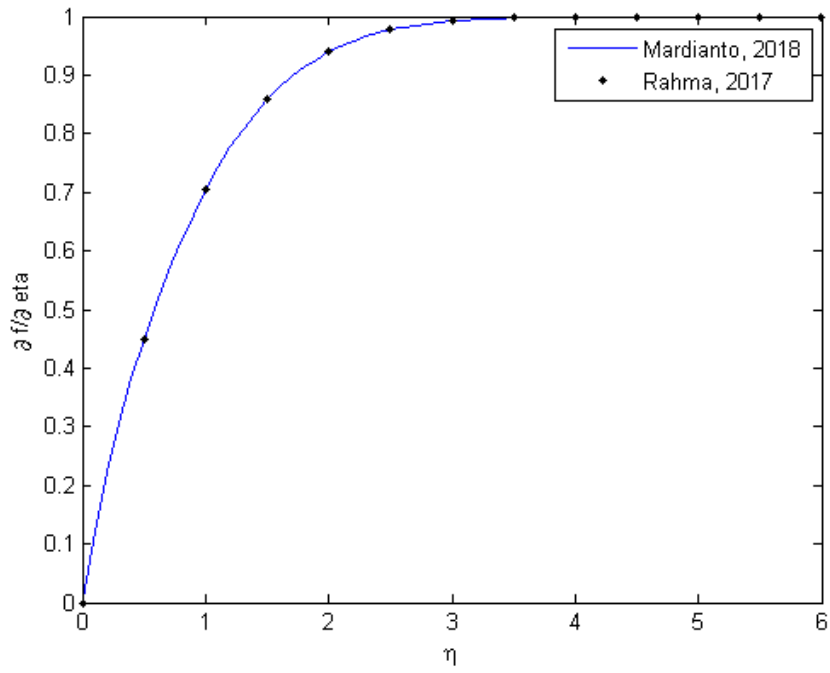
$i$  dan  $j$  yang tetap

- Menyelesaikan solusi model matematika saat  $t + \Delta t$

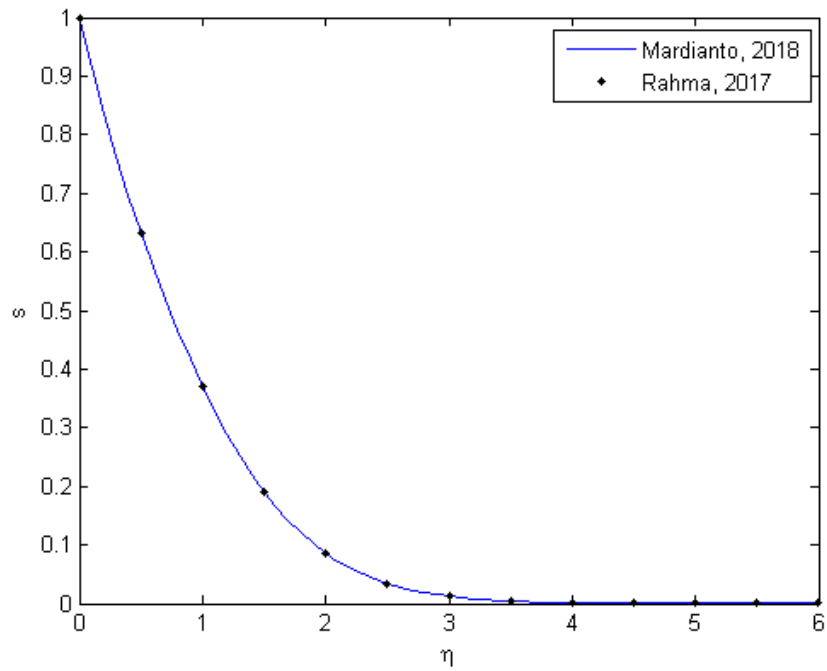
4. Mendapatkan solusi untuk nilai  $u$ ,  $s$ ,  $U$  dan  $S$  saat iterasi waktu ke- $n$

#### 5.4 Validasi Model

Validasi merupakan suatu proses iteratif yang berupa pengujian berturut-turut sebagai proses penyempurnaan model komputer (Widodo, 2012). Untuk menguji apakah model yang digunakan dalam penelitian ini valid, model yang digunakan pada penelitian ini dibandingkan dengan model yang digunakan peneliti sebelumnya dan telah mendapat pengakuan secara akademik melalui jurnal internasional atau konferensi internasional. Model pembanding yang digunakan adalah model yang telah digunakan pada



Gambar 5.2: Perbandingan profil kecepatan dan dengan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 0$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.3: Perbandingan profil temperatur dengan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 0$  saat  $t = 0.2$

penelitian tahun 2017 untuk fluida kental yang melalui bola berpori (Rahma, 2017) dengan judul "Forced Convection of Unsteady Magnetohydrodynamics Fluid Past A Porous Sphere". Dengan menggunakan parameter  $M = 0$  dan  $Ri = 0$  untuk kedua penelitian ini serta menghilangkan parameter porositas  $\phi = 0$  untuk penelitian yang dilakukan Rahma, dkk., profil kecepatan dan temperatur dapat dilihat seperti gambar Gambar 5.2 dan Gambar 5.3.

Tabel 5.1: Hasil numerik profil kecepatan dan temperatur pada penelitian yang berbeda

Sumbu $-\eta$	Kecepatan		Temperatur	
	A	B	A	B
0	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.5	0.4486	0.4486	0.6334	0.6334
1	0.7045	0.7045	0.3701	0.3701
1.5	0.8579	0.8579	0.0864	0.0864
2	0.9392	0.9392	0.0343	0.0343
2.5	0.9769	0.9769	0.0120	0.0120
3	0.9922	0.9922	0.0037	0.0037
3.5	0.9922	0.9922	0.0010	0.0010
4	0.9976	0.9976	0.0003	0.0003
4.5	0.9994	0.9994	0.0001	0.0001
5	0.9998	0.9998	0.0000	0.0000
5.5	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000

A: Mardianto (2018)

B: Rahma (2017)

Berdasarkan Gambar 5.2 dan Gambar 5.3, model yang dibuat Rahma, dkk, dan penelitian sekarang berimpit. Selain itu, hasil numerik dari kedua penelitian tersebut sama seperti pada Tabel 5.1. Hal ini menunjukkan bahwa model untuk penelitian sekarang valid untuk parameter yang telah ditentukan. Oleh karena itu, perilaku fluida dapat dibandingkan untuk variasi parameter yang lainnya.

## 5.5 Penyelesaian Numerik

Masalah dalam penelitian ini diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema implisit. Penyelesaian tersebut disimulasikan dengan program Matlab R2010a. Grid yang digunakan dalam simulasi ini adalah  $dt = 0.005$ ,  $dx = 5^\circ$  dan  $d\eta = 0.1$ , sedangkan partisi yang digunakan adalah  $nt = 40$ ,  $nx = 36$  dan  $n\eta = 60$  sehingga terdapat titik pada setiap variabel kecepatan  $u$ , temperatur  $s$ , dan  $f$  sebanyak  $37 \times 61 \times 411$ .



Perilaku aliran fluida dipelajari dengan menggunakan variasi parameter magnetik  $M$ , bilangan Prandtl  $Pr$  serta bilangan Richardson  $Ri$ .

### 5.5.1 Pengaruh Parameter Magnetik

Nilai parameter magnetik  $M$  sebanding dengan konduktivitas listrik  $\sigma$  dan kekuatan medan magnet  $B_0$ , tetapi berbanding terbalik dengan densitas fluida  $\rho$ . Akibatnya, jika parameter magnetik meningkat, maka konduktivitas listrik  $\sigma$  atau kekuatan medan magnet  $B_0$  meningkat, tetapi densitas fluida menurun. Parameter magnetik juga berkaitan langsung dengan gaya Lorentz. Hal ini dikarenakan besarnya gaya Lorentz sebanding dengan konduktivitas listrik  $\sigma$  dan kekuatan medan magnet  $B_0$ .

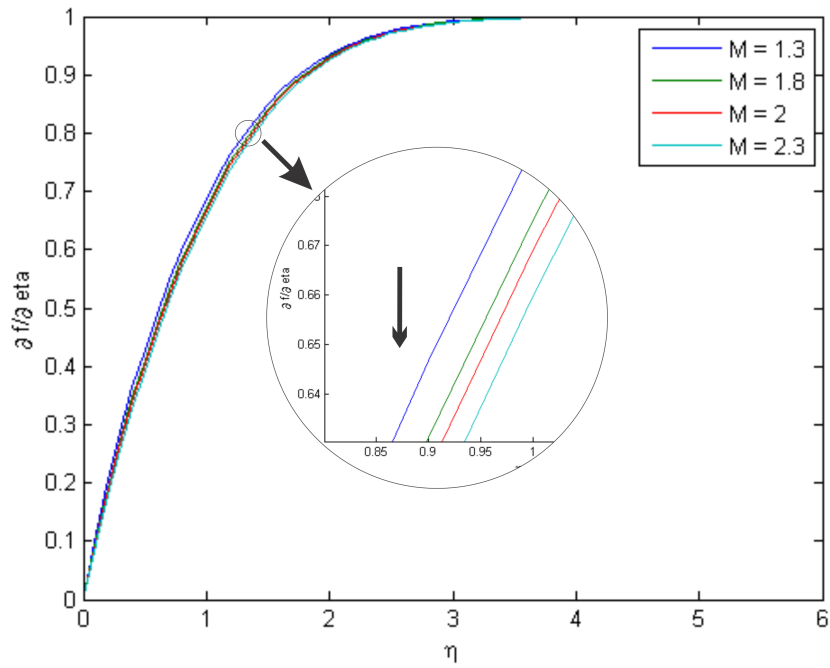
Untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik terhadap perilaku fluida, variasi parameter magnetik yang disimulasikan berdasarkan Tabel 5.2 dengan diameter bola  $a = 10$  dan kekuatan medan magnet  $B_0 = 10^{-2}$ . Nilai densitas dan konduktivitas bahan pada Tabel 5.2 diperoleh dari [https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical\\_resistivity\\_and\\_conductivity](https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity). Parameter tetap yang digunakan adalah  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$ . Hasil dari simulasi yang dilakukan ditunjukkan seperti pada Gambar 5.4 - Gambar 5.7.

Tabel 5.2: Nilai parameter magnetik berdasarkan bahan pembuat bola

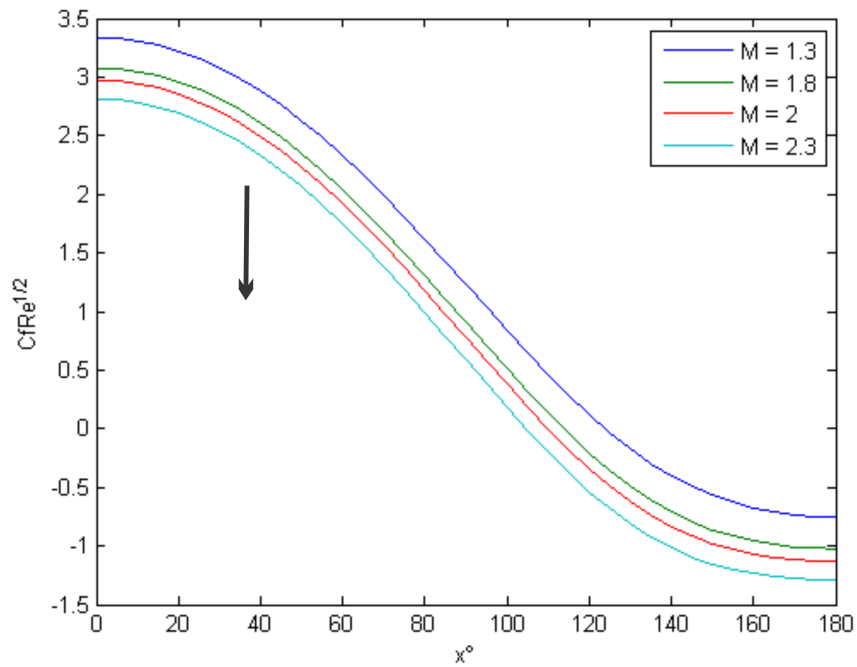
Bola magnetik	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\sigma$ (sm <sup>-1</sup> )	$M$
Besi	$7.87 \times 10^3$	$1.04 \times 10^7$	1.3
Kobalt	$8.86 \times 10^3$	$1.6 \times 10^7$	1.8
Baja	$7.75 \times 10^3$	$1.61 \times 10^7$	2.0
Seng	$7.14 \times 10^3$	$1.68 \times 10^7$	2.3

Dari Gambar 5.4, kecepatan fluida berkurang ketika nilai parameter magnetik bertambah dari  $\eta = 0$  sampai  $\eta = 3$ . Hal ini dikarenakan adanya gaya Lorentz pada bola bermagnet sehingga fluida yang melalui bola bermagnet tersebut menerima gaya Lorentz. Besarnya gaya Lorentz sebanding dengan parameter magnetik. Dengan meningkatnya parameter magnetik, gaya Lorentz juga semakin meningkat. Akibatnya gaya Lorentz pada sekitar bola bermagnet juga meningkat sehingga berpengaruh pada menurunnya kecepatan fluida di sekitar bola bermagnet.

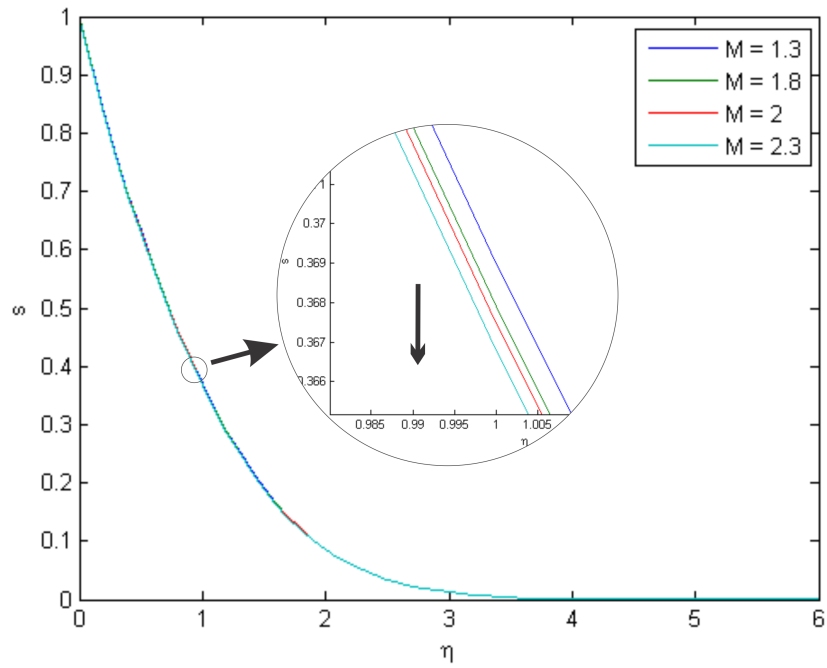
Gesekan kulit terbesar terletak titik stagnasi  $x = 0^\circ$  karena kecepatan terbesar terletak pada titik tersebut kemudian menurun akibat tekanan yang meningkat. Hal yang terjadi sesuai dengan persamaan Bernoulli  $p + \rho v^2/2$ . Bertambahnya nilai parameter magnetik berpengaruh pada menurunnya gesekan kulit pada bola bermagnet seperti pada Gambar 5.5. Parameter



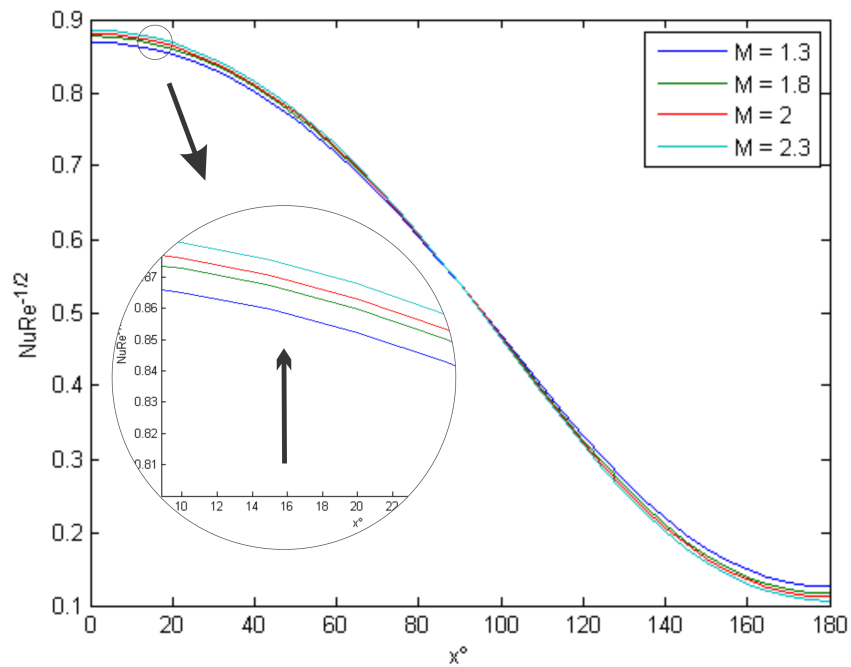
Gambar 5.4: Profil kecepatan dengan parameter magnetik berdasarkan Tabel 5.2 untuk bilangan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.15$



Gambar 5.5: Profil gesekan kulit dengan parameter magnetik untuk bilangan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.6: Profil temperatur dengan parameter magnetik untuk bilangan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.7: Profil bilangan Nusselt dengan parameter magnetik untuk bilangan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$

magnetik yang semakin besar mengakibatkan kecepatan berkurang sehingga gesekan kulit juga berkurang. Titik dimana gesekan kulit bernilai nol ini mulai terjadi separasi. Kecepatan yang semakin menurun di sekitar bola bermagnet berakibat pada kecepatan yang mendekati nol atau bahkan menjadi negatif. Gesekan bernilai negatif berarti berlawanan dengan arah aliran karena kecepatan  $u$  searah dengan sumbu  $-x$  dari titik stagnasi  $x = 0^\circ$  sampai  $x = 180^\circ$ .

Temperatur fluida menurun dengan meningkatnya nilai parameter magnetik seperti pada Gambar 5.6. Karena Gambar 5.6 tidak terlalu jelas, maka dilakukan perbesaran pada  $\eta = 1$ . Temperatur fluida menurun karena energi internal fluida menurun. Penurunan ini disebabkan adanya menurunnya kecepatan fluida yg disebabkan adanya medan magnet di sekitar bola bermagnet. Hal ini berakibat pada menurunnya temperatur di sekitar bola tersebut. Penurunan kecepatan mengakibatkan kenaikan densitas fluida. Dengan bertambahnya densitas fluida, perpindahan panas yang terjadi semakin lambat dengan bertambahnya parameter magnetik.

Bilangan Nusselt bergantung pada temperatur pada permukaan fluida. Bilangan Nusselt meningkat dikarenakan temperatur yang turun pada  $x = 0^\circ$  sampai  $x \approx 90^\circ$  seperti yang terlihat pada Gambar 5.7. Temperatur fluida juga dipengaruhi kecepatan fluida seperti pada persamaan 4.70. Panas yang ada pada partikel fluida juga bergantung pada kecepatan fluida. Ketika kecepatan menurun akibat adanya gaya Lorentz menyebabkan distribusi panas berkurang. Karena hal ini bilangan Nusselt meningkat. Pada  $x \approx 90^\circ$  sampai  $x \approx 180^\circ$ , bilangan Nusselt turun karena adanya fluida yang mengalir berlawanan ke arah titik stagnasi. Semakin besar gesekan ke arah titik stagnasi berpengaruh pada meningkatnya temperatur sehingga bilangan Nusselt semakin turun di bagian belakang dari permukaan bola bermagnet.

Fluida yang berada dalam piston, akan menjadi gas dengan adanya pembakaran. Berarti hukum gas ideal yang ditulis sebagai  $pV = nRT$  berlaku. Parameter magnetik yang meningkat berakibat pada menurunnya temperatur sehingga tekanan menurun karena volume piston yang tetap. Tekanan dapat dituliskan sebagai perbandingan antara gaya dan luas permukaan. Karena luas permukaan juga tetap, maka gaya juga menurun sehingga energi juga menurun berdasarkan  $W = F \cdot s$ . Berarti semakin turun bilangan magnetik, energi yang dihasilkan semakin besar.

Tabel 5.3: Pengaruh parameter magnetik berdasarkan bahan bola magnetik pada ketebalan lapisan batas dan waktu separasi

Parameter Magnetik	Ketebalan Lapisan Batas	Waktu Separasi
1.3	2.9000	0.1800
1.8	2.9000	0.1750
2.0	2.9000	0.1700
2.3	2.9000	0.1650

Berdasarkan Tabel 5.3, kenaikan parameter magnetik tidak mempengaruhi ketebalan lapisan batas. Untuk pemilihan parameter magnetik seperti pada Tabel 5.3, parameter tersebut belum mampu mengubah lapisan batas. Berarti kecepatan untuk mencapai maksimum terletak pada ketebalan lapisan batas yang sama.

Kenaikan parameter magnetik mempercepat waktu separasi. Parameter magnetik yang tinggi menyebabkan tingginya gaya Lorentz. Akibatnya, kecepatan fluida lebih cepat menurun sehingga waktu terjadinya separasi lebih cepat.

Titik separasi untuk aliran fluida tak tunak terjadi jika kondisi  $u = (\partial u / \partial y)_w = 0$ . Untuk penyelesaian numerik, kondisi tersebut sangat sulit dipenuhi sehingga dipilih nilai  $u = (\partial u / \partial y)_w \rightarrow 0$ . Dari Tabel 5.4, titik separasi untuk  $M = 1.3, 1.8, 2.0, 2.3$  terletak pada  $x = 130^\circ, 120^\circ, 115^\circ, 110^\circ$ . Titik separasi lebih maju dengan menurunnya kecepatan yang diakibatkan meningkatnya parameter magnetik. Jika parameter magnetik meningkat, nilai dari fluida akan menurun seperti pada Gambar 5.4. Akibatnya, kecepatan fluida menuju nol lebih awal sehingga titik separasi lebih maju.

### 5.5.2 Pengaruh Bilangan Prandtl

Bilangan Prandtl menyatakan sebuah perbandingan antara difusivitas viskositas dengan difusivitas panas. Difusivitas panas dapat ditulis sebagai perbandingan antara konduktivitas panas dengan densitas dikali kalor jenis fluida. Karena difusivitas panas berbanding terbalik dengan densitas fluida, maka bilangan Prandtl sebanding dengan densitas fluida. Jika nilai bilangan Prandtl  $0 < Pr < 1$ , maka nilai difusivitas viskositas lebih kecil daripada nilai difusivitas termal. Hal ini berakibat pada penyebaran temperatur lebih cepat. Jika nilai bilangan Prandtl  $Pr > 1$ , maka penyebaran temperatur lebih lambat. Pengaruh bilangan Prandtl terhadap perilaku fluida dipelajari dengan membagi dua kasus, yaitu kasus untuk  $0 < Pr < 1$  dan kasus untuk  $Pr \geq 1$ .

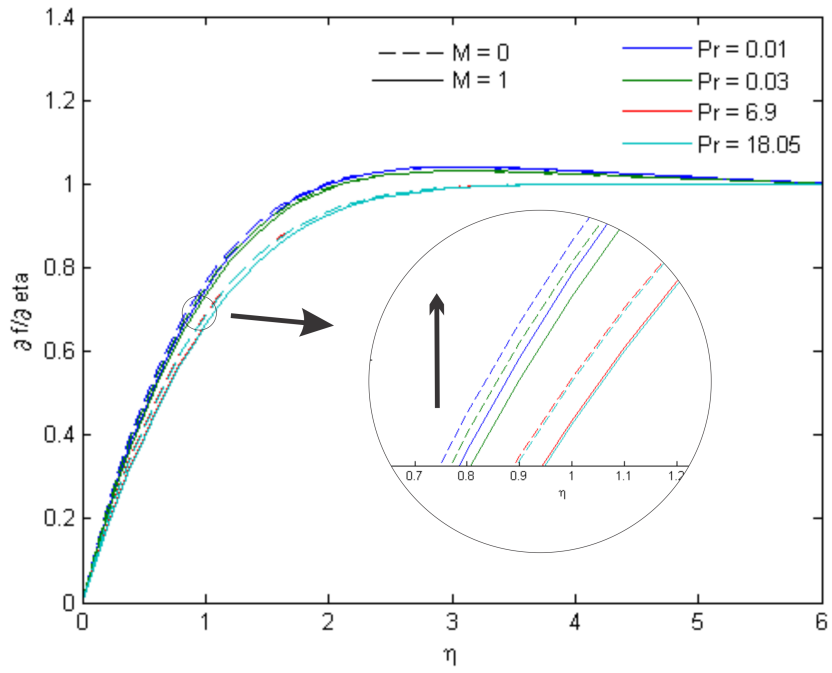
Dalam kehidupan nyata, contoh benda yang memiliki nilai bilangan

Tabel 5.4: Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi parameter magnetik dengan  $Pr = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$

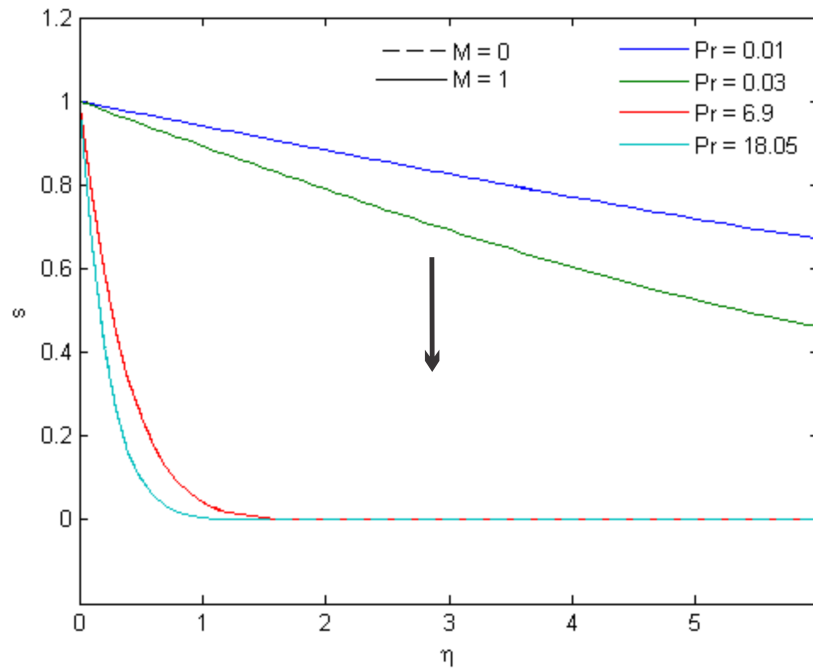
$x^\circ$	M = 1.3	M = 1.8	M = 2.0	M = 2.3
0°	0.11111336	0.102579302	0.099089638	0.09377004
5°	0.110941188	0.102403058	0.098911688	0.093589445
10°	0.110359227	0.101805482	0.098307595	0.09297526
15°	0.109368957	0.100788046	0.097278821	0.091928938
20°	0.10797261	0.099352948	0.09582755	0.090452637
25°	0.106173168	0.097503116	0.093956686	0.088549223
30°	0.103974371	0.095242221	0.091669872	0.086222288
35°	0.101380739	0.092574706	0.088971513	0.083476184
40°	0.098397603	0.089505824	0.085866831	0.08031608
45°	0.095031161	0.086041715	0.082361942	0.076748054
50°	0.091288574	0.082189524	0.078463985	0.072779244
55°	0.087178121	0.077957591	0.074181336	0.068418083
60°	0.082709438	0.073355752	0.069523923	0.06367466
65°	0.077893903	0.06839579	0.064503719	0.058561266
70°	0.072745197	0.063092109	0.059135462	0.053093192
75°	0.067280143	0.057462702	0.053437682	0.047289855
80°	0.061519849	0.051530485	0.047434115	0.041176342
85°	0.05549126	0.045325042	0.041155544	0.034785402
90°	0.049229065	0.038884778	0.034642046	0.028159849
95°	0.042777888	0.032259308	0.027945479	0.021355192
100°	0.036194421	0.025511726	0.021131794	0.014442026
105°	0.029548982	0.018720126	0.014282538	0.007507476
110°	0.022925768	0.011977565	0.007494669	0.000654778
115°	0.016421077	0.005389692	0.00087792	-0.005999813
120°	0.010139149	-0.00093027	-0.005450616	-0.012333093
125°	0.004185971	-0.00686876	-0.011374186	-0.018223348
130°	-0.001337974	-0.012320187	-0.01678515	-0.023559888
135°	-0.006344779	-0.017195027	-0.021593516	-0.028252271
140°	-0.01076529	-0.021426961	-0.025734498	-0.032238511
145°	-0.014554326	-0.024978991	-0.029175002	-0.035492145
150°	-0.017694886	-0.027848199	-0.0319186	-0.038027511
155°	-0.020200196	-0.030067489	-0.034007086	-0.039900924
160°	-0.022111506	-0.031701832	-0.035515952	-0.041204836
165°	-0.023490329	-0.032837843	-0.036542761	-0.042054213
170°	-0.024405783	-0.033567854	-0.037189818	-0.042567014
175°	-0.024919527	-0.033971387	-0.037544228	-0.04289855
180°	-0.025072169	-0.034098743	-0.037660344	-0.042940134

Prandtl  $0 < Pr < 1$  adalah logam cair  $Pr = 0.01$  dan merkuri  $Pr = 0.03$ , sedangkan bilangan Prandtl yang memiliki nilai  $Pr > 1$  adalah air ( $Pr = 6.9$ ), dan etanol ( $Pr = 18.05$ ) (Rapp, 2017). Hasil simulasi untuk variasi bilangan Prandtl dapat dilihat pada Gambar 5.8 - Gambar 5.11. Variasi bilangan Prandtl yang digunakan adalah  $Pr = 0.01, 0.03, 6.9, 18.05$ . Parameter tetap yang digunakan adalah  $Ri = 1$ .

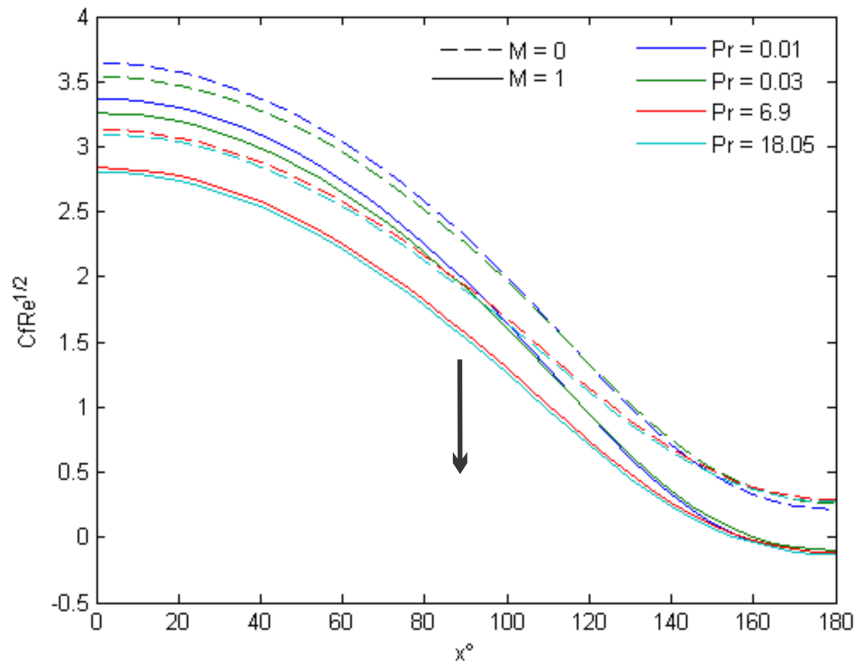
Peningkatan bilangan Prandtl berpengaruh pada menurunnya kecepatan fluida seperti yang tampak pada Gambar 5.8. Penyebabnya adalah bilangan Prandtl sebanding dengan densitas fluida. Densitas fluida yang tinggi



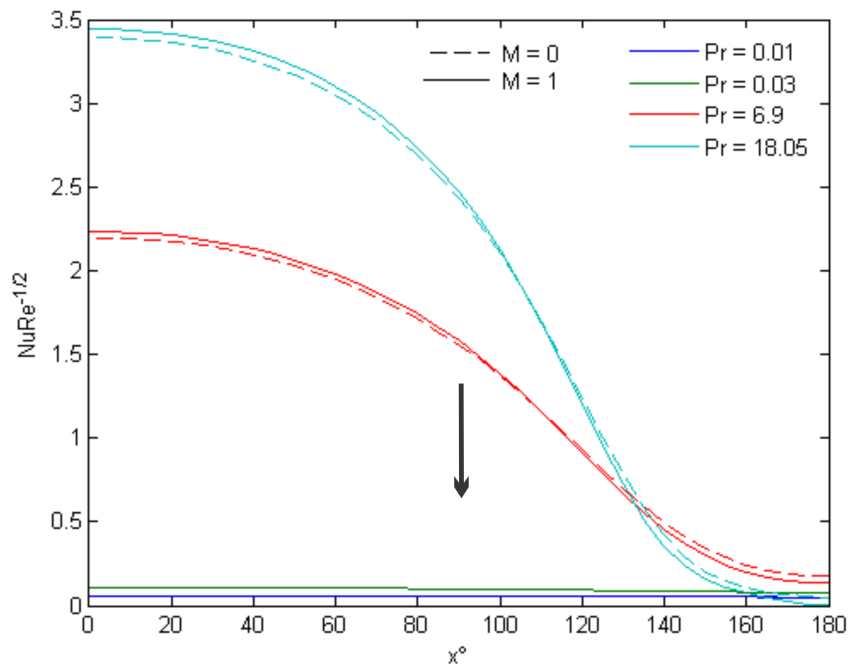
Gambar 5.8: Profil kecepatan variasi bilangan Prandtl dengan saat  $t = 0.2$



Gambar 5.9: Profil temperatur dengan variasi bilangan Prandtl dengan dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.10: Profil gesekan kulit dengan variasi bilangan Prandtl dengan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.11: Profil perpindahan panas dengan variasi bilangan Prandtl dengan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$



menyebabkan fluida melaju dengan lambat. Bilangan Prandtl  $0 < Pr < 1$  memiliki pengaruh yang cukup besar terhadap kecepatan daripada bilangan Prandtl  $Pr \geq 1$ . Gradien kenaikan kecepatan fluida karena bilangan Prandtl bergantung densitas fluida. Untuk bilangan Prandtl  $0 < Pr < 1$ , densitas fluida sangat kecil sehingga kecepatan fluida cukup tinggi. Akan tetapi, untuk bilangan Prandtl  $Pr \geq 1$ , densitas fluida sangat tinggi menyebabkan kecepatan fluida kecil. Dari Gambar 5.8, fluida yang melalui bola bermagnet  $M = 1$  memiliki kecepatan yang lebih kecil daripada fluida yang melalui bola biasa  $M = 0$ . Keadaan ini diakibatkan oleh adanya gaya Lorentz sehingga kecepatan fluida menjadi lebih kecil.

Peningkatan bilangan Prandtl berakibat pada menurunnya kecepatan fluida. Kecepatan fluida yang lambat ini mengakibatkan gesekan kulit pada permukaan bola menjadi kecil seperti pada Gambar 5.10. Fluida yang melalui bola bermagnet, dalam hal ini  $M = 1$ , memiliki kecepatan yang lebih kecil daripada fluida yang melalui bola tanpa magnet. Dengan adanya magnet tersebut, gaya Lorentz muncul sehingga kecepatan fluida berkurang pada sekitar permukaan fluida. Akibatnya, gesekan kulit pada bola bermagnet lebih kecil daripada gesekan kulit pada bola tanpa magnet.

Pada Gambar 5.9, jika bilangan Prandtl meningkat, maka temperatur fluida menurun. Bilangan Prandtl yang meningkat mengakibatkan konduktivitas panas menurun sehingga penyebaran temperatur fluida berjalan lambat. Akibatnya, temperatur menjadi turun. Untuk bilangan Prandtl antara nol dan satu ( $0 < Pr < 1$ ), memiliki konduktivitas panas yang tinggi sehingga perubahan temperatur sangat cepat seperti pada Gambar 5.9. Hal ini berbeda dengan bilangan Prandtl lebih dari sama dengan 1, nilai difusivitas termal kecil untuk  $Pr \geq 1$ . Akibatnya, penyebaran temperatur lebih lambat.

Temperatur yang tinggi menghasilkan tekanan yang tinggi sehingga gaya yang diperoleh juga tinggi. Hal ini dikarenakan volume piston tetap sehingga luas permukaannya juga tetap. Akibatnya, energi yang dihasilkan juga tinggi. Bilangan Prandtl yang meningkat menyebabkan turunnya temperatur fluida. Dari penjelasan sebelumnya, peningkatan nilai bilangan Prandtl menyebabkan turunnya temperatur sehingga energi yang dihasilkan lebih kecil.

Semakin meningkat bilangan Prandtl, maka temperatur fluida juga semakin turun. Dampak dari temperatur fluida menurun yang diakibatkan peningkatan bilangan Prandtl adalah peningkatan bilangan Nusselt seperti pada Gambar 5.11. Bilangan Nusselt tinggi berarti perpindahan panas yang

lambat. Grafik bilangan Nusselt yang menurun karena adanya fluida yang mengalir sehingga proses konveksi terjadi. Akibatnya, bilangan Nusselt pada bagian belakang dari bola lebih kecil dari bagian depan bola, berarti bagian belakang lebih panas daripada bagian yang depan.

Perbandingan pengaruh bilangan Prandtl pada temperatur yang melalui bola bermagnet  $M = 1$  atau tidak  $M = 0$  hanya dapat dilihat pada Gambar 5.11. Pada Gambar 5.9, temperatur fluida yang dipengaruhi bola bermagnet dengan yang tidak sangat berimpit sehingga tidak dapat dilihat perbandingannya. Untuk bilangan Prandtl  $0 < Pr < 1$ , profil bilangan Nusselt antara  $M = 0$  dan  $M = 1$  sangat berimpit. Sedangkan untuk bilangan Prandtl  $Pr > 1$ , semakin besar bilangan Prandtl, maka semakin besar bilangan Nusselt. Hal ini dikarenakan adanya pengaruh gaya Lorentz atau tidak.

Perbandingan untuk kasus  $0 < Pr < 1$  dan kasus  $Pr \geq 1$  dapat dilihat pada Gambar 5.9 dan Gambar 5.11. Gradien penurunan untuk kasus  $0 < Pr < 1$  lebih kecil. Nilai difusivitas termal yang tinggi menyebabkan penyebaran temperatur lebih cepat pada kasus  $0 < Pr < 1$ . Hal ini tentunya berbeda dengan kasus  $Pr \geq 1$  yang gradien penurunannya tinggi. Dalam kasus ini, nilai difusivitas termal kecil sehingga penyebaran temperatur lebih lambat.

Tabel 5.5: Pengaruh bilangan Prandtl pada ketebalan lapisan batas dan waktu separasi

Bilangan Prandtl		Ketebalan Lapisan Batas		Waktu Separasi	
		M = 0	M = 1	M = 0	M = 1
$0 < Pr < 1$	0.01	1.8000	1.9000	-	0.2000
	0.03	1.9000	2.0000	-	0.2000
$Pr \geq 1$	6.9	2.9000	3.0000	-	0.2000
	18.05	2.9000	3.0000	-	0.2000

Dari Tabel 5.5, pengaruh bilangan Prandtl terhadap ketebalan lapisan batas hanya terjadi untuk kasus  $0 < Pr < 1$ . Pada kasus ini, nilai difusivitas termal cukup tinggi sehingga penyebaran temperatur cukup cepat. Dengan kata lain, densitas fluida kecil. Nilai inilah yang menyebabkan fluida mengalir lebih cepat. Berbeda dengan kasus  $Pr \geq 1$ , densitas fluida kecil sehingga tidak ada efek terhadap ketebalan lapisan batas. Dengan adanya perbedaan bilangan magnetik, yaitu  $M = 0$  dan  $M = 1$ , ketebalan lapisan batas berubah variasi bilangan Prandtl. Karena untuk  $M = 1$ , terdapat gaya Lorentz yang menghambat kecepatan fluida sehingga untuk mencapai kecepatan maksimum, memerlukan ketebalan yang lebih besar daripada untuk  $M = 0$ .

Untuk bilangan magnetik  $M = 0$  tidak terjadi separasi karena kondisi  $u = (\partial u / \partial y)_w = 0$  belum terpenuhi. Oleh karena itu, fluida tidak mencapai kecepatan yang bernilai nol atau negatif. Berbeda untuk bilangan magnetik  $M = 1$ , separasi terjadi pada waktu yang sama dengan variasi bilangan Prandtl.

Dari Gambar 5.10 dan Tabel 5.5, terlihat bahwa untuk  $M = 0$  tidak terjadi separasi. Akibatnya, hanya untuk  $M = 1$  dengan variasi bilangan Prandtl yang diberikan paparan kecepatan pada permukaan bola bermagnet. Kecepatan tersebut dapat dilihat pada Tabel 5.6.

Tabel 5.6: Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Prandtl dengan  $M = 1$  dan  $Ri = 1$  saat  $t = 0.2$

$x^\circ$	Pr = 0.01	Pr = 0.03	Pr = 6.9	Pr = 18.05
0°	0.11111336	0.102579302	0.099089638	0.09377004
5°	0.110941188	0.102403058	0.098911688	0.093589445
10°	0.110359227	0.101805482	0.098307595	0.09297526
15°	0.109368957	0.100788046	0.097278821	0.091928938
20°	0.10797261	0.099352948	0.09582755	0.090452637
25°	0.106173168	0.097503116	0.093956686	0.088549223
30°	0.103974371	0.095242221	0.091669872	0.086222288
35°	0.101380739	0.092574706	0.088971513	0.083476184
40°	0.098397603	0.089505824	0.085866831	0.08031608
45°	0.095031161	0.086041715	0.082361942	0.076748054
50°	0.091288574	0.082189524	0.078463985	0.072779244
55°	0.087178121	0.077957591	0.074181336	0.068418083
60°	0.082709438	0.073355752	0.069523923	0.06367466
65°	0.077893903	0.06839579	0.064503719	0.058561266
70°	0.072745197	0.063092109	0.059135462	0.053093192
75°	0.067280143	0.057462702	0.053437682	0.047289855
80°	0.061519849	0.051530485	0.047434115	0.041176342
85°	0.05549126	0.045325042	0.041155544	0.034785402
90°	0.049229065	0.038884778	0.034642046	0.028159849
95°	0.042777888	0.032259308	0.027945479	0.021355192
100°	0.036194421	0.025511726	0.021131794	0.014442026
105°	0.029548982	0.018720126	0.014282538	0.007507476
110°	0.022925768	0.011977565	0.007494669	0.000654778
115°	0.016421077	0.005389692	0.00087792	-0.005999813
120°	0.010139149	-0.00093027	-0.005450616	-0.012333093
125°	0.004185971	-0.00686876	-0.011374186	-0.018223348
130°	-0.001337974	-0.012320187	-0.01678515	-0.023559888
135°	-0.006344779	-0.017195027	-0.021593516	-0.028252271
140°	-0.01076529	-0.021426961	-0.025734498	-0.032238511
145°	-0.014554326	-0.024978991	-0.029175002	-0.035492145
150°	-0.017694886	-0.027848199	-0.0319186	-0.038027511
155°	-0.020200196	-0.030067489	-0.034007086	-0.039900924
160°	-0.022111506	-0.031701832	-0.035515952	-0.041204836
165°	-0.023490329	-0.032837843	-0.036542761	-0.042054213
170°	-0.024405783	-0.033567854	-0.037189818	-0.042567014
175°	-0.024919527	-0.033971387	-0.037544228	-0.04289855
180°	-0.025072169	-0.034098743	-0.037660344	-0.042940134

Dari Tabel 5.6, titik separasi untuk  $Pr = 0.01, 0.03, 6.9, 18.05$  terletak pada  $x = 130^\circ, 120^\circ, 115^\circ, 110^\circ$ . Dengan meningkatnya bilangan Prandtl, titik separasi semakin maju. Bilangan Prandtl yang meningkat berakibat pada densitas fluida yang meningkat sehingga kecepatan fluida semakin menurun. Akibatnya, kecepatan fluida dan gradien terhadap  $y$  lebih mudah menuju nol sehingga titik separasi terjadi lebih awal.

### 5.5.3 Pengaruh Bilangan Richardson

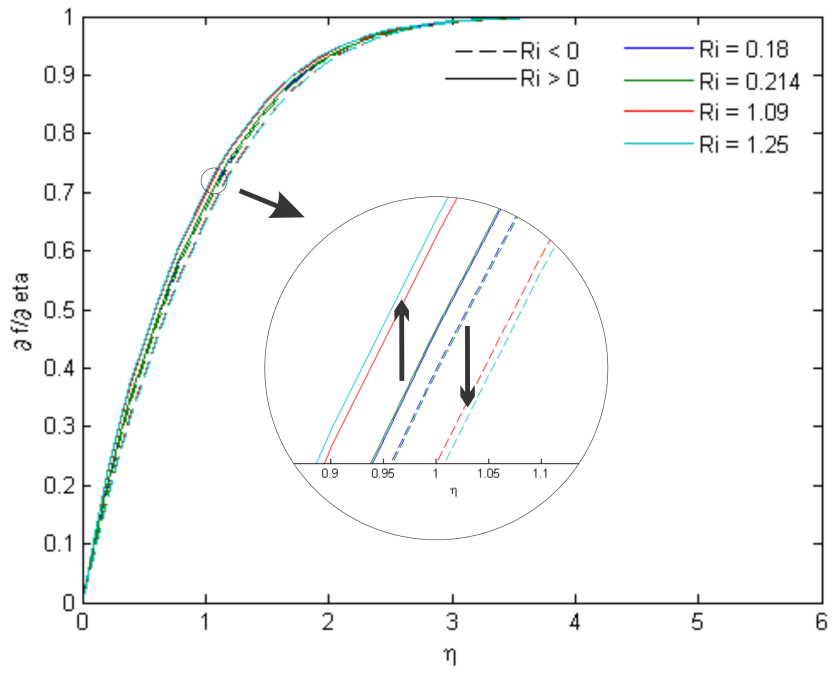
Bilangan Richardson merupakan bilangan yang menyatakan perbandingan antara bilangan Grashof  $Gr$  dan kuadrat bilangan Reynolds  $Re$ . Bilangan Grashof mewakili adanya gaya apung. Jika bilangan Grashof bernilai nol, maka bilangan Richardson bernilai nol. Kasus ini menjadi kasus konveksi paksa. Bilangan Richardson  $0 < Ri < 1$  berarti kuadrat dari bilangan Reynolds yang lebih dominan, sedangkan bilangan Richardson  $Ri \geq 1$  berarti bilangan Grashof yang lebih dari atau sama dengan kuadrat dari bilangan Reynolds.

Nilai bilangan Richardson sebanding dengan koefisien ekspansi termal dari suatu fluida. Ketika koefisien ekspansi panas meningkat, maka nilai bilangan Richardson juga meningkat. Hal ini berakibat pada peningkatan kecepatan fluida. Keberadaan bilangan Richardson adalah bentuk dari adanya gaya apung pada persamaan momentum.

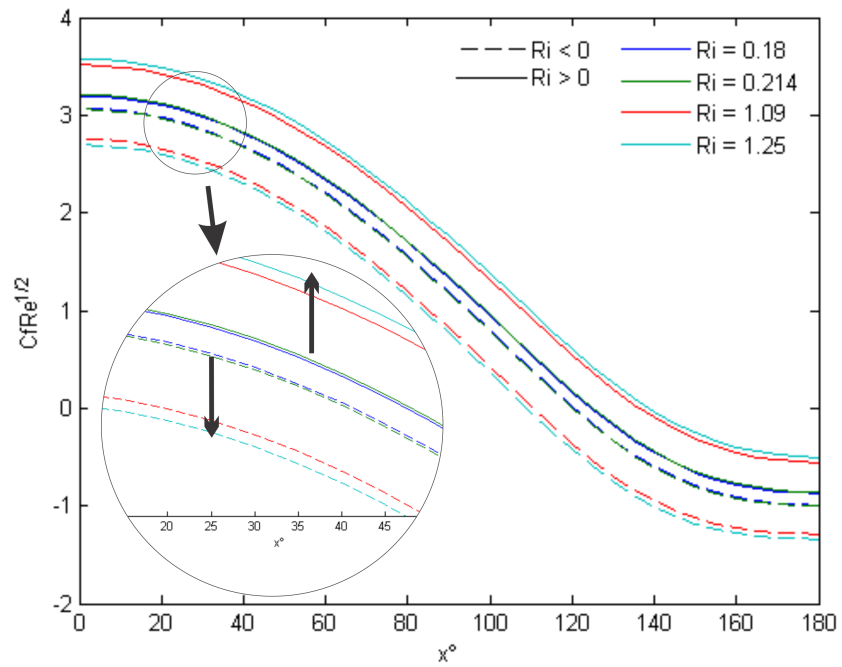
Untuk memperoleh nilai bilangan Richardson, penelitian ini menggunakan fluida yang berbeda sehingga koefisien ekspansi termal juga berbeda seperti yang terlihat pada Tabel 5.7 dalam  $1/K$  dengan gravitasi  $g = 10$  dan diameter bola  $a = 100$  dan mengasumsikan  $Re = 1$ . Parameter tetap yang digunakan untuk simulasi adalah  $M = 1$  dan  $Pr = 1$ . Nilai koefisien ekspansi termal pada Tabel 5.7 diperoleh dari [https://www.engineeringtoolbox.com/cubical-expansion-coefficients-d\\_1262.html](https://www.engineeringtoolbox.com/cubical-expansion-coefficients-d_1262.html). Hasil simulasi untuk konveksi yang membantu dapat dilihat pada Gambar 5.12 - Gambar 5.15.

Tabel 5.7: Nilai bilangan Richardson berdasarkan koefisien ekspansi termal

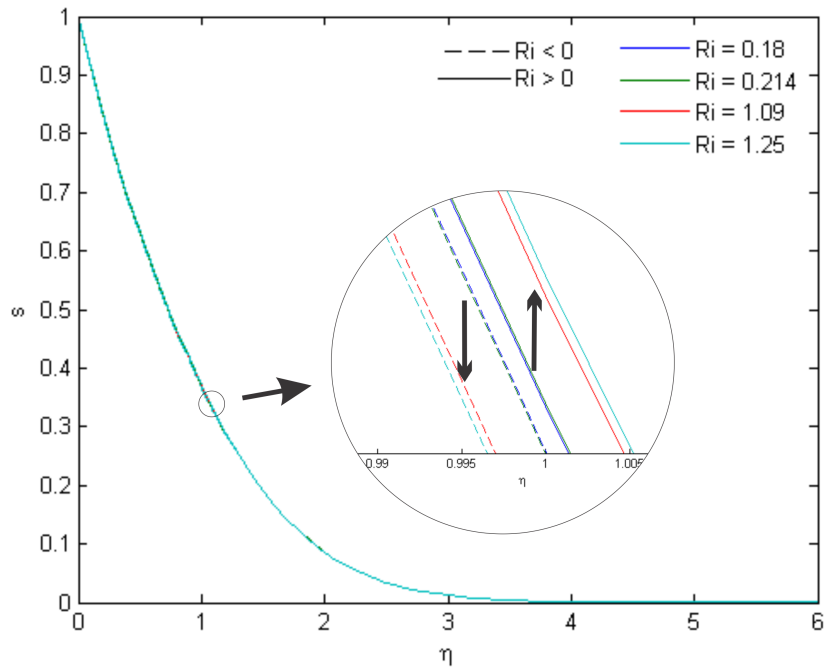
Fluida	$\beta (1/K)$	Ri
Mercuri	$1.8 \times 10^{-4}$	0.18
Air	$2.14 \times 10^{-4}$	0.214
Ethanol	$1.09 \times 10^{-3}$	1.09
Benzene	$1.25 \times 10^{-3}$	1.25



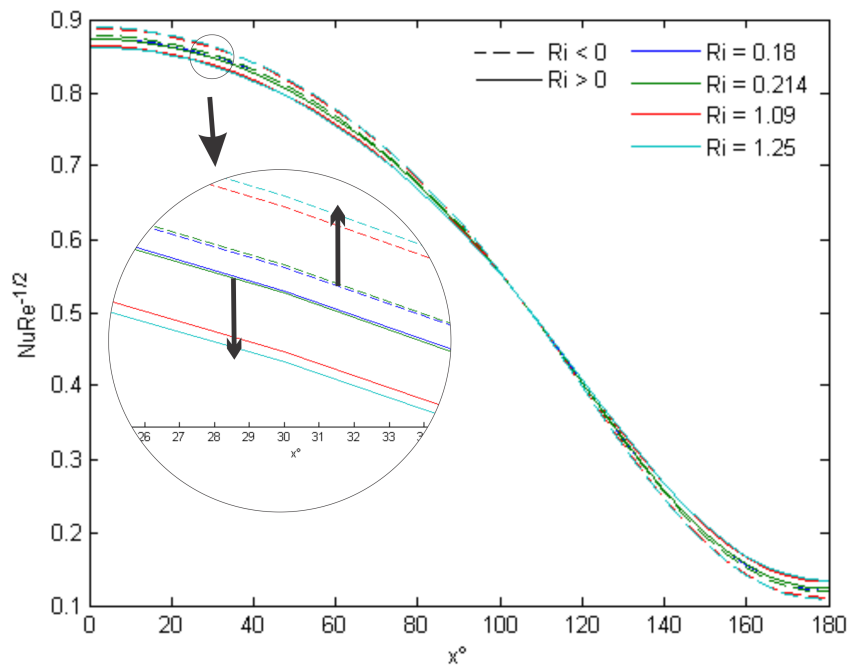
Gambar 5.12: Profil kecepatan dengan variasi bilangan Richardson dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.13: Profil gesekan kulit dengan variasi bilangan Richardson dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.14: Profil temperatur dengan variasi bilangan Richardson dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$



Gambar 5.15: Profil bilangan Nusselt dengan variasi bilangan Richardson dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$

Berdasarkan Gambar 5.12, peningkatan bilangan Richardson menyebabkan kecepatan fluida meningkat untuk konveksi yang membantu dimana temperatur dinding lebih tinggi daripada temperatur fluida sehingga  $Ri > 0$ . Bilangan Richardson berhubungan dengan persamaan momentum sebagai perwakilan adanya gaya apung. Peningkatan konveksi campuran menyebabkan densitas fluida menurun sehingga kecepatan fluida meningkat. Berbeda dengan konveksi yang berlawanan dimana temperatur dinding lebih rendah daripada temperatur fluida sehingga  $Ri < 0$ . Semakin meningkat bilangan Richardson semakin turun kecepatan fluida. Nilai negatif dari parameter ini yang menyebabkan demikian.

Akibat meningkatnya kecepatan fluida karena bilangan Richardson meningkat untuk  $Ri > 0$  gesekan kulit juga ikut meningkat seperti pada Gambar 5.13. Temperatur juga meningkat jika bilangan Richardson bertambah pada Gambar 5.14 untuk kasus konveksi yang membantu. Sama halnya untuk alasan sebelumnya, meningkatnya bilangan Richardson mengakibatkan densitas fluida menurun sehingga temperatur juga meningkat. Keadaan ini berakibat pada turunnya bilangan Nusselt lokal, yang artinya perpindahan panas terjadi lebih cepat seperti pada Gambar 5.15. Berbeda dengan kasus  $Ri < 0$  dimana berkebalikan dengan kasus  $Ri > 0$ . Secara fisis untuk kasus konveksi yang membantu perpindahan terjadi dari bola bermagnet ke fluida, sedangkan untuk kasus konveksi yang berlawanan terjadi sebaliknya.

Sama halnya dengan kasus  $0 < Ri < 1$ , perilaku fluida untuk kasus  $Ri \geq 1$  juga hasilnya sama. Semakin meningkat parameter konveksi campuran, semakin meningkat kecepatan, temperatur dan skin friction, tetapi bilangan Nusselt lokal menurun. Perbedaan dengan jelas dapat dilihat pada grafik kecepatan atau temperatur. Dari Gambar 5.12, gradien kecepatan untuk kasus  $0 < Ri < 1$  lebih rendah daripada gradien kecepatan untuk kasus  $Ri \geq 1$ . Pengaruh koefisien ekspansi termal menyebabkan hal yang demikian. Begitu pula halnya dengan gradien temperatur untuk kasus  $0 < Ri < 1$  yang lebih kecil seperti pada Gambar 5.14. Pengaruh ini menyebabkan kenaikan gesekan kulit atau perpindahan panas yang lebih cepat.

Peningkatan bilangan Richardson berakibat pada temperatur yang meningkat untuk kasus konveksi yang membantu. Pada suatu piston, volume ruang pembakaran selalu tetap. Tekanan meningkat karena temperatur yang meningkat sehingga gaya yang diperoleh juga meningkat. Akibatnya energi meningkat dengan bilangan Richardson yang meningkat. Untuk kasus yang berlawanan, terjadi sebaliknya. Jadi, untuk mendapatkan energi yang lebih

besar, lebih baik konveksi yang membantu yang digunakan.

Tabel 5.8: Pengaruh bilangan Richardson pada ketebalan lapisan batas, waktu separasi, titik separasi

Parameter Konveksi	Ketebalan Lapisan Batas		Waktu Separasi	
	Ri < 0	Ri > 0	Ri < 0	Ri > 0
0.18	2.9000	2.9000	0.1750	0.1750
0.214	2.9000	2.9000	0.1650	0.1750
1.09	3.0000	2.8000	0.1600	0.1800
1.25	3.0000	2.8000	0.1600	0.1800

Pada Tabel 5.8, kenaikan nilai bilangan Richardson mengakibatkan turunnya ketebalan lapisan batas untuk konveksi yang membantu, dan terjadi sebaliknya untuk konveksi yang berlawanan. Bilangan Richardson berhubungan dengan adanya gaya apung sehingga dengan meningkatnya bilangan Richardson, maka gaya apung semakin meningkat. Akibatnya, kecepatan fluida meningkat. Ketebalan lapisan batas bergantung pada kecepatan fluida untuk mencapai kecepatan maksimum. Karena bilangan Richardson meningkatkan kecepatan fluida, maka ketebalan lapisan batas semakin turun. Akan terjadi sebaliknya untuk konveksi yang berlawanan.

Terjadinya separasi lapisan akibat pengaruh bilangan Richardson untuk konveksi yang membantu dapat dilihat pada Tabel 5.9. Titik separasi untuk Ri = 0.18, 0.214, 1.09 terjadi di titik  $x = 145^\circ, 150^\circ, 170^\circ$ , tetapi tidak terjadi separasi untuk Ri = 1.25. Bilangan Richardson berpengaruh pada meningkatnya kecepatan sehingga terjadinya separasi semakin mundur saat bilangan Richardson semakin meningkat.

Hal yang sebaliknya terjadi untuk konveksi yang berlawanan. Seperti pada Tabel 5.10, titik separasi terjadi di titik  $x = 120^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 110^\circ$  untuk bilangan Richardson Ri = 0.18, 0.214, 1.09. Untuk konveksi yang berlawanan, kecepatan fluida semakin menurun ketika bilangan Richardson meningkat sehingga kecepatan mudah semakin menuju nol. Akibatnya, terjadinya separasi semakin maju akibat bilangan Richardson yang meningkat.



Tabel 5.9: Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Richardson pada konveksi yang membantu  $Ri > 0$  dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$

$x^\circ$	$Ri = 0.18$	$Ri = 0.214$	$Ri = 1.09$	$Ri = 1.25$
0°	0.092034560	0.092272991	0.098409052	0.099528322
5°	0.091911053	0.092149572	0.098287858	0.09940753
10°	0.091500718	0.091739582	0.097886734	0.099008012
15°	0.090804934	0.091044405	0.097207087	0.098331182
20°	0.089825775	0.090066115	0.09625104	0.097379171
25°	0.088565964	0.088807436	0.095021383	0.096154781
30°	0.087028814	0.088807437	0.093521518	0.09466143
35°	0.085218175	0.085462719	0.091755397	0.092903088
40°	0.083138373	0.083384864	0.089727455	0.090884211
45°	0.08079416	0.081042877	0.087442553	0.08860968
50°	0.078190686	0.078441912	0.084905935	0.086084757
55°	0.075333508	0.075587527	0.082123214	0.083315068
60°	0.072228655	0.072485749	0.079100411	0.080306637
65°	0.068882779	0.069143225	0.075844066	0.077065989
70°	0.065303429	0.065567495	0.072361461	0.073600366
75°	0.061499494	0.061767426	0.068660985	0.069918079
80°	0.057481853	0.057753866	0.064752708	0.066029067
85°	0.053264299	0.053540556	0.060649187	0.061945687
90°	0.048864748	0.049145346	0.056366572	0.057683798
95°	0.044306738	0.044591677	0.051925987	0.053264124
100°	0.039621109	0.039910268	0.047355135	0.048713841
105°	0.034847637	0.035140747	0.042689922	0.044068207
110°	0.030036254	0.030332871	0.037975798	0.039371909
115°	0.025247301	0.025546799	0.033268297	0.03467966
120°	0.020550302	0.020851879	0.028632293	0.030055525
125°	0.016020861	0.016323572	0.024139535	0.02557057
130°	0.011735745	0.012038564	0.01986445	0.021298785
135°	0.007766781	0.008068682	0.015878652	0.017311697
140°	0.004174713	0.004474764	0.012245155	0.013672651
145°	0.0010044	0.001301863	0.009013532	0.010431971
150°	-0.001717492	-0.001423095	0.006217129	0.007624096
155°	-0.003981845	-0.003690684	0.003872917	0.005267306
160°	-0.005793773	-0.005505707	0.001983864	0.003365933
165°	-0.0071676	-0.0068822	0.00054307	0.001914343
170°	-0.008121339	-0.007837957	-0.000461386	0.000901665
175°	-0.008671743	-0.008389554	-0.001041918	0.000316234
180°	-0.008830623	-0.008548719	-0.001207959	0.000149033

Tabel 5.10: Nilai kecepatan pada permukaan bola bermagnet untuk variasi bilangan Richardson pada konveksi yang berlawanan  $Ri < 0$  dengan  $M = 1$  dan  $Pr = 1$  saat  $t = 0.2$

$x^\circ$	$Ri = 0.18$	$Ri = 0.214$	$Ri = 1.09$	$Ri = 1.25$
$0^\circ$	0.102370703	0.101973957	0.091734739	0.08986101
$5^\circ$	0.102196226	0.101799344	0.09155659	0.089682211
$10^\circ$	0.10160522	0.101207815	0.090951464	0.089074579
$15^\circ$	0.100599176	0.10020086	0.089920855	0.088039613
$20^\circ$	0.099180342	0.098780726	0.088467015	0.086579566
$25^\circ$	0.097351724	0.096950422	0.086592958	0.084697456
$30^\circ$	0.095117107	0.094713731	0.084302487	0.082397087
$35^\circ$	0.092481076	0.092075241	0.081600223	0.079683092
$40^\circ$	0.089449066	0.089040387	0.078491675	0.076560992
$45^\circ$	0.086027431	0.085615529	0.074983329	0.0730373
$50^\circ$	0.082223568	0.081808072	0.071082804	0.06911968
$55^\circ$	0.078046102	0.077626652	0.066799086	0.064817187
$60^\circ$	0.073505177	0.073081433	0.062142879	0.060140633
$65^\circ$	0.068612894	0.068184545	0.05712713	0.055103125
$70^\circ$	0.063383955	0.062950734	0.051767781	0.049720838
$75^\circ$	0.057836582	0.057398286	0.046084825	0.044014098
$80^\circ$	0.051993778	0.051550289	0.040103728	0.038008829
$85^\circ$	0.045884967	0.045436289	0.03385725	0.031738412
$90^\circ$	0.039548007	0.039094297	0.027387617	0.02524588
$95^\circ$	0.033031407	0.032573026	0.020748863	0.018586284
$100^\circ$	0.026396418	0.025933956	0.014008917	0.01182878
$105^\circ$	0.019718423	0.019252758	0.007250812	0.005057795
$110^\circ$	0.013086846	0.012619152	0.000572172	-0.001627559
$115^\circ$	0.006602915	0.006134661	-0.00591769	-0.008116517
$120^\circ$	0.00037495	-0.00009213	-0.012103339	-0.014292377
$125^\circ$	-0.005488375	-0.00595235	-0.017870852	-0.02004031
$130^\circ$	-0.010885752	-0.01134459	-0.023116403	-0.025256091
$135^\circ$	-0.015730735	-0.016182426	-0.027754527	-0.029854506
$140^\circ$	-0.019958318	-0.020401031	-0.031725448	-0.033776809
$145^\circ$	-0.023530563	-0.023962819	-0.035001391	-0.036997154
$150^\circ$	-0.026440997	-0.026861869	-0.037591329	-0.039527395
$155^\circ$	-0.028716344	-0.029125626	-0.039542189	-0.041418183
$160^\circ$	-0.030413284	-0.030811619	-0.040933946	-0.04275373
$165^\circ$	-0.031609114	-0.031998017	-0.041867743	-0.043639465
$170^\circ$	-0.032387215	-0.032768993	-0.042448467	-0.044184099
$175^\circ$	-0.032820011	-0.033197578	-0.042764782	-0.044479157
$180^\circ$	-0.032953796	-0.033330388	-0.042871581	-0.044581032

## BAB 6

### PENUTUP

#### 6.1 Kesimpulan

Model yang dihasilkan pada penelitian ini berupa persamaan momentum dan persamaan energi. Untuk *small time*, persamaan momentum ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \cos x \left( 1 - u^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} t \sin x \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - tM(u - 1) - \frac{2}{3} t \text{Ris} \end{aligned}$$

dan persamaan energi ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3\text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \cos x = \text{Pr} t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( u \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

dengan kondisi batas

saat  $t < 0$ ,  $f = u = 0$ ,  $s = 0$  untuk setiap  $\eta$  dan  $x$

saat  $t \geq 0$ ,  $f = u = 0$ ,  $s = 1$  untuk  $\eta = 0$

$u = 1$ ,  $s = 0$  saat  $\eta \rightarrow \infty$

dan kondisi awal

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{erf} \left( \frac{\eta}{2} \right) \\ s &= 1 - \mathbf{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) \end{aligned}$$

Untuk *large time*, persamaan momentum ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - U^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\ = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) - M(U - 1) - \frac{2}{3} \text{Ris} \end{aligned}$$

dan persamaan energi ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3\text{Pr}F \frac{\partial S}{\partial Y} \cos x = \text{Pr} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} F = U = 0, S = 1 & \text{ untuk } Y = 0 \\ U = 1, S = 0 & \text{ untuk } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik dengan variasi parameter seperti parameter magnetik ( $M$ ), bilangan Prandtl ( $\text{Pr}$ ) dan parameter konveksi campuran ( $\alpha$ ), hasil penelitian ini dapat disimpulkan sebagai berikut ini.

1. Peningkatan parameter magnetik berpengaruh pada menurunnya kecepatan, temperatur dan gesekan kulit, tetapi bilangan Nusselt lokal meningkat. Selain itu, tidak ada perubahan ketebalan lapisan batas, waktu separasi semakin cepat serta titik separasi semakin maju saat parameter magnetik meningkat.
2. Peningkatan bilangan Prandtl berpengaruh pada menurunnya kecepatan, temperatur dan gesekan kulit, tetapi bilangan Nusselt lokal meningkat. Hanya untuk bilangan Prandtl  $0 < \text{Pr} < 1$ , ketebalan lapisan batas meningkat. Bilangan Prandtl tidak mempengaruhi waktu separasi, tetapi titik separasi semakin maju.
3. Peningkatan parameter konveksi campuran berpengaruh pada meningkatnya kecepatan, temperatur dan gesekan kulit, tetapi bilangan Nusselt lokal menurun. Selain itu, lapisan batas semakin tipis, waktu separasi semakin lama serta titik separasi semakin mundur saat bilangan Richardson meningkat.

## 6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, saran untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan mengubah kondisi fisis, bentuk benda maupun lingkungan fluida.
2. Metode yang digunakan pada penelitian diganti dengan metode yang berbeda.

## **PERNYATAAN RESMI**

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengembangan Masyarakat - Institut Teknologi Sepuluh Nopember (LPPM-ITS) Surabaya yang telah memberikan dukungan dalam penulisan tesis ini melalui surat yang tertulis dengan nomor 970/PKS/ITS/2018.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, Jr., J. D. (1995), *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Anderson, Jr., J. D. (2001), *Fundamental of Aerodynamics*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Arber, T. (2013), *Fundamental of Magnetohydrodynamics*, Lecture Handout: University of Warwick, Coventry.
- Aydin, O. dan Kaya, A. (2011), "MHD-mixed Convection from A Vertical Slender Cylinder", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 4, Hal. 1863-1873.
- Bellomo, N., De Angelis, E. dan Delitala, M. (2007), *Lecture Notes on Mathematical Modelling in Applied Sciences*, Lecture Handout: Politecnico Torino, Torino.
- Davidson, P. A. (2001), *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Schlichting, H. dan Gersten, K. (2017), *Boundary-Layer Theory*, 9<sup>th</sup> edition, Springer-Verlag, Berlin.
- Hsiao, K. L. (2011), "MHD Mixed Convection for Viscoelastic Fluid Past A Porous Wedge", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 1, hal. 1-8.
- Leal, L. G. (1992), *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press, New York.
- Makinde, O. dan Aziz, A. (2010), "MHD Mixed Convection from A Vertical Plate Embedded in A Porous Medium with A Convective Boundary Condition", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, No. 9, hal. 1813-1820.
- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. dan Shafie, S. (2012), "Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow Past A Sphere in A Micropolar Fluid", *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 1450, hal. 211-217.
- Nazar, R., Amin, N. dan Pop, I. (2002), "On The Mixed Convection Boundary Layer Flow about A Solid Sphere with Constant Surface Temperature",

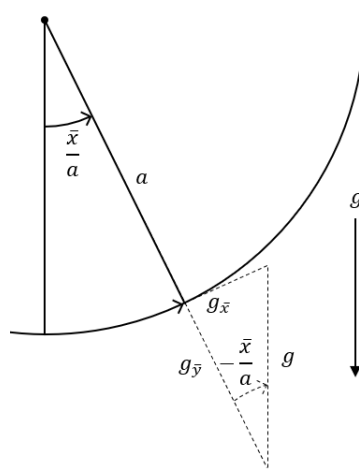
- The Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 27 No. 2, Hal. 117-135.
- Potter, M. C., Wiggert, D. C. dan Ramadan, B. H. (2012), *Mechanics of Fluids*, 4<sup>th</sup> edition, Cengage Learning, Stanford.
- Pritchard, P. J. (2011), *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*, 8<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Rahma, N. A., Widodo, B., and Adzkiya, D. (2017), "Forced Convection of Unsteady Magnetohydrodynamics Fluid Past A Porous Sphere", *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 1913, Hal. 1-8.
- Rapp, B. E. (2017), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Elsevier, Oxford.
- Turkyilmazoglu, M. (2011), Numerical and Analytical Solutions for The Flow and Heat Transfer Near The Equator of A MHD Boundary Layer over A Porous Rotating Sphere, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, No. 5, hal. 831-842.
- Versteeg, H. K., dan Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2<sup>nd</sup> edition, Pearson Education Limited, London.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITS Press, Surabaya.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015), "The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamics Boundary Layer Flow Of A Viscous Fluid Past A Sphere", *International Journal of Advances in Science, Engineering and Technology*, Vol. 4, No. 1, hal. 75-78.
- Widodo, B., dan Ningtyas, R. A. (2017), "The Unsteady Micropolar Fluid Flow Past A Sliced Sphere", *International Journal of Chemical Concepts*, Vol. 3, No. 2, hal. 218-224.
- Zheng, L., Niu, J., Zhang, X. dan Gao, Y. (2012), "MHD Flow and Heat Transfer over A Porous Shrinking Surface with Velocity Slip and Temperature Jump", *Mathematical and Computational Modeling*, Vol. 56, No. 5, hal. 133-144.



## LAMPIRAN A

### Penurunan Gravitasi

Pada lampiran ini, penurunan gravitasi pada penyelesaian persamaan momentum sumbu  $-x$  dan sumbu  $-y$  dijelaskan sebagai berikut



Gambar 1.1: Penurunan gravitasi pada arah  $x$  dan  $y$

Dari Gambar 1.1, gravitasi untuk arah  $x$  dan  $y$  pada penyelesaian persamaan momentum diturunkan.

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\bar{x}}{a}\right) &= \frac{g_{\bar{x}}}{g} \\ g_{\bar{x}} &= -g \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\ &= -g \sin\left(\frac{ax}{a}\right) \\ &= -g \sin x\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{\bar{x}}{a}\right) &= \frac{g_{\bar{y}}}{g} \\ g_{\bar{y}} &= g \cos\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\ &= g \cos\left(\frac{ax}{a}\right) \\ &= g \cos x\end{aligned}$$



## LAMPIRAN B

### Aliran Bebas Bola

Diketahui bahwa pada penelitian ini fluida yang digunakan merupakan fluida Newtonian sehingga fluida ini bersifat *irrotational*

$$\nabla \times \mathbf{U} = 0$$

Akibatnya ada fungsi skalar  $\phi$  sehingga kecepatan dapat dituliskan sebagai gradien dari  $\phi$

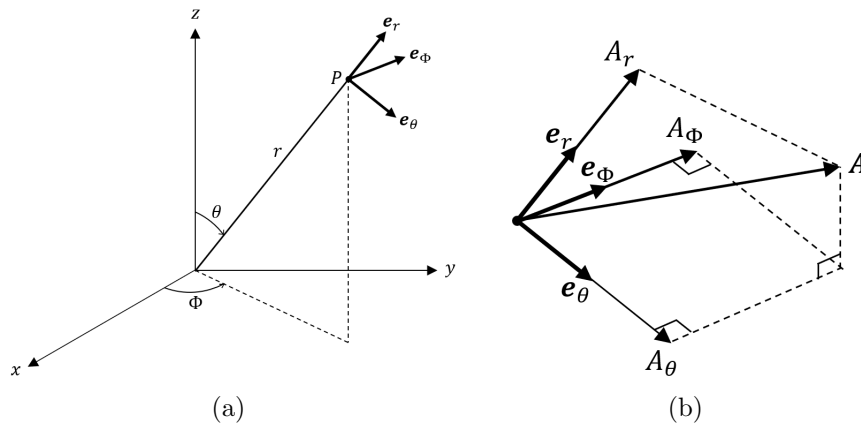
$$\mathbf{U} = \nabla \phi \quad (2.1)$$

Kita notasikan  $\phi$  sebagai kecepatan potensial  $\phi$  merupakan fungsi terhadap ruang sehingga  $\phi = \phi(x, y, z)$ , atau  $\phi = \phi(r, \theta, z)$ , atau  $\phi = \phi(r, \theta, \Phi)$ . Selain itu, fluida dalam penelitian ini bersifat *incompressible* yang berakibat

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.2)$$

Substitusi persamaan 2.1 pada persamaan 2.2, maka

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.3)$$



Gambar 2.1: (a) Koordinat bola, (b) Vektor unit bola

Perhatikan persamaan 2.3 untuk koordinat bola

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \mathbf{e}_\Phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi \right)$$

sehingga

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Phi^2} = 0 \quad (2.4)$$

Misal didefinisikan kecepatan potensial

$$\phi = -\frac{C}{r} \quad (2.5)$$

sehingga persamaan 2.1 menjadi

$$\mathbf{U} = \nabla \phi = \frac{C}{r^2} \mathbf{e}_r$$

atau

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{C}{r^2} \\ U_\theta &= 0 \\ U_\Phi &= 0 \end{aligned}$$

Ketiga komponen arah kecepatan di atas disebut sebagai sumber tiga dimensi atau lebih singkatnya titik sumber. Untuk memperoleh nilai  $C$ , perhatikan bola dengan jari-jari  $r$  dan luas permukaan  $S$ . Misal aliran massa yang mengalir melalui permukaan  $S$  ditulis sebagai

$$\iint_S \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}$$

sedangkan aliran volume ditulis sebagai

$$\lambda = \iint_S \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}$$

Karena  $\mathbf{U} = U_r \mathbf{e}_r = C \mathbf{e}_r / r^2$ , maka

$$\lambda = \frac{C}{r^2} 4\pi r^2$$

$$C = \frac{\lambda}{4\pi}$$

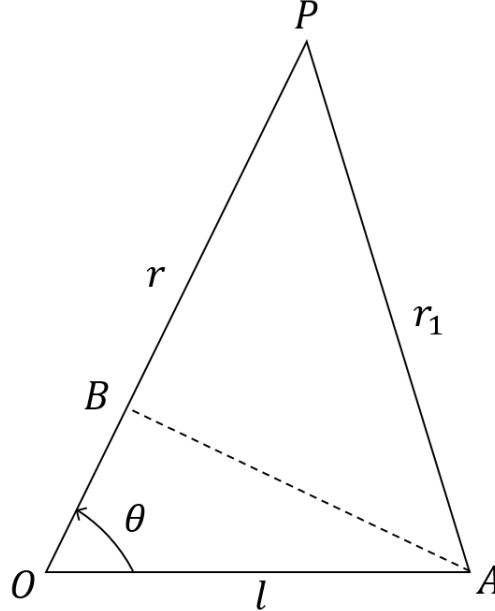
Akibatnya

$$U_r = \frac{\lambda}{4\pi r^2} \quad (2.6)$$

Dengan substitusi persamaan 2.6 ke persamaan 2.5, maka diperoleh sebuah titik sumber

$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi r} \quad (2.7)$$

Pada persamaan di atas,  $\lambda$  merupakan kekuatan titik sumber. Jika  $\lambda$  bernilai negatif, maka akan diperoleh titik tumpul (Anderson, 2001).



Gambar 2.2: Pasangan titik sumber dan titik tumpul

Dari Gambar 2.2, misalkan titik O merupakan titik tumpul, titik A merupakan titik sumber dan titik P merupakan titik dimana kecepatan

potensial yang dicari sehingga

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{\lambda}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi} \left( \frac{r - r_1}{rr_1} \right)\end{aligned}$$

Misal titik sumber mendekati titik tampung sehingga

$$l \rightarrow 0 \quad \text{saat} \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Jika  $l \rightarrow 0$ ,  $r - r_1 \rightarrow OB = l \cos \theta$  dan  $rr_1 \rightarrow r^2$ , maka

$$\phi = \lim_{l \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty} -\frac{\lambda}{4\pi} \left( \frac{r - r_1}{rr_1} \right) = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{l \cos \theta}{r^2}$$

atau

$$\phi = -\frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (2.8)$$

dimana  $\mu$  merupakan kekuatan titik sumber dan titik tampung dengan  $\mu = \lambda l$  sehingga persamaan 2.1 ditulis sebagai

$$\mathbf{U} = \nabla \phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\Phi \quad (2.9)$$

Perhatikan Gambar 2.3, koordinat bola untuk aliran bebas adalah

$$U_r = -U_\infty \cos \theta$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta$$

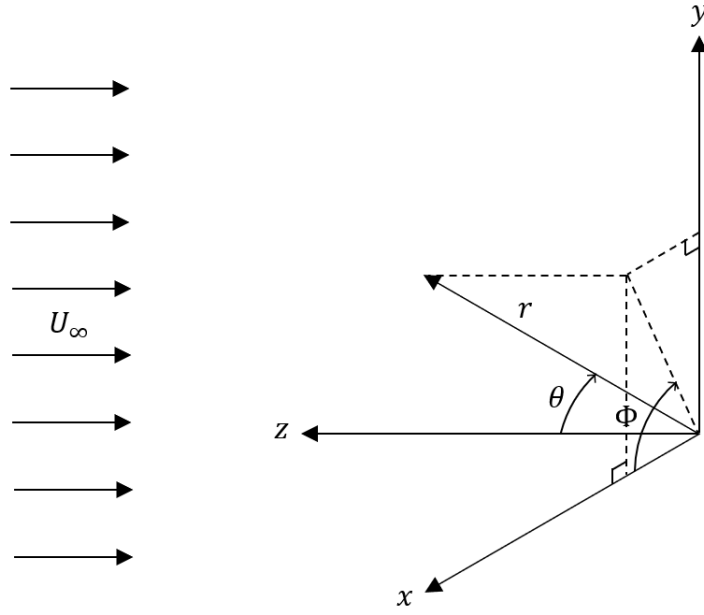
$$U_\Phi = 0$$

Dengan menambahkan persamaan di atas dengan persamaan 2.9, maka diperoleh

$$U_r = -U_\infty \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = -\left( U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \cos \theta$$

$$U_\theta = U_\infty \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \left( U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin \theta$$

$$U_\Phi = 0$$



Gambar 2.3: Aliran bebas bola

Untuk titik stagnasi dimana  $U_r = U_\theta = 0$ , maka  $U_\theta = 0$  mengakibatkan  $\sin \theta = 0$  yang terletak pada  $\theta = 0$  atau  $\theta = \pi$ . Sedangkan untuk  $U_r = 0$ , maka

$$U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0$$

dimana  $r = R$  sehingga

$$R = \left( \frac{\mu}{2\pi U_\infty} \right)^{1/3} \quad (2.10)$$

Dengan substitusi 2.10 pada  $U_r$ , maka

$$\begin{aligned} U_r &= - \left( U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \right) \cos \theta = - \left( U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \cos \theta \\ &= - (U_\infty - U_\infty) \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Dengan substitusi 2.10 pada  $U_\theta$ , maka

$$U_\theta = \left( U_\infty + \frac{\mu}{4\pi R^3} \right) \sin \theta = \left( U_\infty + \frac{\mu}{4\pi} \frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \sin \theta$$

atau

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \quad (2.11)$$

Kecepatan aliran bebas untuk penelitian ini dituliskan sebagai

$$\bar{U}_e = \frac{3}{2}U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$$

Dengan mengubah ke bentuk nondimensional, maka

$$\begin{aligned}u_e U_\infty &= \frac{3}{2}U_\infty \sin\left(\frac{ax}{a}\right) \\u_e &= \frac{3}{2}\sin x\end{aligned}$$



## LAMPIRAN C

### Transformasi Persamaan Dimensional

Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(aruU_\infty)}{\partial(ax)} + \frac{\partial(arvU_\infty\text{Re}^{-1/2})}{\partial(ay\text{Re}^{-1/2})} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{aU_\infty\text{Re}^{-1/2}}{a\text{Re}^{-1/2}} \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Persamaan momentum arah  $x$

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{u} \\ &+ \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ax)} + \frac{vU_\infty}{\text{Re}^{1/2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ay\text{Re}^{-1/2})} \right) \\ &= \frac{\rho U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

dan ruas kanan

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{u} + \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \\ = -\frac{\partial(\rho p U_\infty^2)}{\partial(ax)} + \mu \left( \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ay\text{Re}^{-1/2})^2} \right) + \sigma B_0^2 u U_\infty \\ + \rho g \beta T (T_W - T_\infty) \sin \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \\ = -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sigma B_0^2 u U_\infty \\ + \rho g \beta T (T_W - T_\infty) \sin x\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $\rho U_\infty^2/a$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho U_\infty a} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} u \\
&\quad + \frac{g\beta(T_W - T_\infty)a^3}{\nu^2} \frac{\nu^2}{U_\infty^2 a^2} T \sin x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Mu} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \sin x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Mu} + \text{RiT} \sin x
\end{aligned}$$

Persamaan momentum arah  $y$

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} \\
&\quad - \rho g \beta (\bar{T} - T_\infty) \cos \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\
&= \rho \left( \frac{\partial(vU_\infty \text{Re}^{-1/2})}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(vU_\infty \text{Re}^{-1/2})}{\partial(ax)} + vU_\infty \frac{\partial(vU_\infty \text{Re}^{-1/2})}{\partial(ay)} \right) \\
&= \frac{\rho U_\infty^2}{a} \text{Re}^{-1/2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

dan ruas kanan

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \sigma B_0^2 \bar{v} - g\beta(\bar{T} - T_\infty) \cos \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) \\
&= -\frac{\partial(\rho p U_\infty^2)}{\partial(ay \text{Re}^{-1/2})} + \mu \left( \frac{\partial^2(vU_\infty \text{Re}^{-1/2})}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(vU_\infty \text{Re}^{-1/2})}{\partial(ay \text{Re}^{-1/2})^2} \right) \\
&\quad + \sigma B_0^2 v U_\infty \text{Re}^{-1/2} - \rho g \beta T (T_W - T_\infty) \cos x \\
&= -\frac{\rho U_\infty^2}{a \text{Re}^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U_\infty}{a^2 \text{Re}^{-1/2}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \sigma B_0^2 v U_\infty \text{Re}^{-1/2} \\
&\quad - \rho g \beta T (T_W - T_\infty) \cos x
\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $(\rho U_\infty^2/a)\text{Re}^{-1/2}$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho U_\infty a} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \frac{v}{\text{Re}} \\
&\quad - \frac{g\beta(T_W - T_\infty)a^3}{\nu^2} \frac{\nu^2}{U_\infty^2 a^2} \frac{T}{\text{Re}^{1/2}} \cos x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \text{M} \frac{v}{\text{Re}} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{T}{\text{Re}^{1/2}} \cos x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \text{M} \frac{v}{\text{Re}} - \frac{\text{RiT}}{\text{Re}^{1/2}} \cos x
\end{aligned}$$

Persamaan energi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Perhatikan bahwa ruas kiri

$$\begin{aligned}
& \rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \\
&= \rho C_p \left( \frac{\partial(T(T_W - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(atU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(T(T_W - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{vU_\infty}{\text{Re}^{1/2}} \frac{\partial(T(T_W - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ay\text{Re}^{-1/2})} \right) \\
&= \frac{\rho C_p U_\infty}{a} (T_W - T_\infty) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

dan ruas kanan

$$\begin{aligned}
k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= k \left( \frac{\partial^2(T(T_W - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(T(T_W - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ay\text{Re}^{-1/2})^2} \right) \\
&= \frac{k}{a^2} (T_W - T_\infty) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \text{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $(\rho C_p U_\infty / a)(T_W - T_\infty)$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{k}{\nu \rho C_p} \frac{\nu}{U_\infty a} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \text{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \text{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN D

### Transformasi Kondisi Batas untuk Temperatur

Diketahui bahwa kondisi batas dimensional adalah

$$\begin{aligned} \text{saat } \bar{t} < 0, \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x} \text{ dan } \bar{y} \\ \text{saat } \bar{t} \geq 0, \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_W \text{ untuk } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dan variabel tak berdimensi

$$T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

Perhatikan bahwa saat  $\bar{t} < 0$ , maka

$$T = \frac{T_\infty - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 0$$

dan saat  $\bar{t} \geq 0$ , maka

$$T = \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1$$

sehingga kondisi batas nondimensional dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \text{saat } t < 0, u = v = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x \text{ dan } y \\ \text{saat } t \geq 0, u = v = 0, T = 1 \text{ untuk } y = 0 \\ u = u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$



## LAMPIRAN E

### Transformasi Persamaan Fungsi Alir

Diketahui bahwa fungsi alir

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dan persamaan momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u - u_e) + \text{RiT} \sin x$$

Perhatikan bahwa ruas kiri

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

dan ruas kanan

$$\begin{aligned} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M(u - u_e) + \text{RiT} \sin x \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + M\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e\right) + \text{RiT} \sin x \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e\right) + \text{RiT} \sin x \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e\right) + \text{RiT} \sin x \end{aligned}$$

sedangkan persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

sehingga

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



## LAMPIRAN F

### Transformasi Persamaan Similaritas

Diketahui bahwa variabel similaritas untuk *small time* adalah

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}, \quad T = s(x, \eta, t)$$

Persamaan momentum untuk fungsi alir adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \text{RiT} \sin x \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{y}{t^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} y t^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{y}{t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} (t^{1/2} u_e r f) \frac{1}{t^{1/2}} = t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} = u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial (t^{1/2} u_e r f)}{\partial x} = t^{1/2} \frac{\partial (u_e r f)}{\partial x} = t^{1/2} r f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( t^{1/2} r f \frac{\partial u_e}{\partial y} + t^{1/2} u_e f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( t^{1/2} r f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \left( t^{1/2} r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x}
\end{aligned}$$

Ruas kiri persamaan momentum

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} \left( -\frac{1}{2} \frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left( t^{1/2} r f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&= -\frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} - \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e^2}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \\
&\quad + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&= -\frac{u_e \eta}{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan persamaan momentum

$$\begin{aligned}
&u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \text{RiT} \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M \left( \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \text{Ris} \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \text{Ris} \sin x
\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $u_e/t$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - t M \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \\ & \quad - \frac{t \text{Ris}}{u_e} \sin x \end{aligned}$$

Diketahui persamaan energi untuk fungsi alir

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Ruas kiri persamaan energi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \\ & \quad - \frac{1}{r} \left( t^{1/2} r f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e f \frac{\partial r}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - f \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{u_e f}{r} \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} - u_e \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Ruas kanan persamaan energi

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} - f \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial y} - \frac{u_e f}{r} \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial y} - u_e \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial y} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} &= -\text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} - \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial y} - \text{Pr} \frac{t u_e f}{r} \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial y} - \text{Pr} t u_e \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + \text{Pr} t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial y}\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \text{Pr} t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right)$$

Diketahui bahwa variabel similaritas untuk *large time*

$$\psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t), \quad Y = y, \quad T = S(x, Y, t)$$

Persamaan momentum untuk fungsi alir adalah

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \text{M} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \text{RiT} \sin x\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{\partial (u_e r F)}{\partial Y} = u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left( u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left( u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) = u_e r \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial (u_e r F)}{\partial y} = r F \frac{\partial u_e}{\partial y} + u_e F \frac{\partial r}{\partial y} + u_e r \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial Y} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y \partial x} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left( r F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e F \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &= r \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x}\end{aligned}$$

sehingga ruas kiri

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \left( r \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left( r F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e F \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial F}{\partial x} \right) u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
&= u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} - \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e^2}{r} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial x} + u_e^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} \\
&\quad - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{u_e^2 F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - u_e^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
&= u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{u_e^2 F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - u_e^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

dan ruas kanan

$$\begin{aligned}
& u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \text{Ri} T \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + M \left( \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} - u_e \right) + \text{Ri} S \sin x \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + M (u_e \frac{\partial F}{\partial Y} - u_e) + \text{Ri} S \sin x
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\
&\quad + \frac{\text{Ri} S}{u_e} \sin x
\end{aligned}$$

Persamaan energi untuk fungsi alir adalah

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial S}{\partial Y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{r} \left( r F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e F \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial S}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial S}{\partial t} - F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{u_e}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - u_e \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\end{aligned}$$

Dengan mengalikan Pr pada kedua ruas persamaan di atas, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{F}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right)$$

## LAMPIRAN G

### Penurunan Kondisi Awal

Perhatikan bahwa untuk *small time*, persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{f}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - t M \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \\ - \frac{t \text{Ris}}{u_e} \sin x \end{aligned}$$

dan persamaan energi

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \text{Pr} t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{f}{r} \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right)$$

Dengan substitusi  $t = 0$  pada persamaan similaritas momentum dan energi, maka diperoleh kondisi awal yang ditulis sebagai

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} = 0 \quad (7.2)$$

Untuk persamaan 7.1, misalkan  $g = d^2 f / d\eta^2$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\eta} + \frac{\eta}{2} g &= 0 \\ \frac{1}{g} \frac{dg}{d\eta} &= -\frac{\eta}{2} \\ \int \frac{1}{g} dg &= \int -\frac{\eta}{2} d\eta \\ \ln g &= -\frac{\eta^2}{4} + c_1 \\ g &= \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} + c_1 \right) \end{aligned}$$

Karena  $g = d^2 f / d\eta^2$ , maka

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\eta^2} &= \exp\left(-\frac{\eta^2}{4} + c_1\right) \\ \frac{df}{d\eta} &= \int \exp\left(-\frac{\eta^2}{4} + c_1\right) d\eta \\ &= \exp(c_1) \int \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yang ditulis sebagai

$$\int \exp(-cx^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \mathbf{erf}(\sqrt{c}x)$$

maka

$$\begin{aligned}f' &= \exp(c_1) \int \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \\ &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2\end{aligned}$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned}t \geq 0 : \quad f &= df/d\eta = 0, \quad s = 1 \text{ untuk } \eta = 0 \\ f &= df/d\eta = 1, \quad s = 0 \text{ untuk } \eta \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Karena untuk  $\eta = 0$ ,  $df/d\eta = 0$ , maka

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\eta} &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2 \\ 0 &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}(0) + c_2 \\ c_2 &= 0\end{aligned}$$

Karena saat  $\eta \longrightarrow \infty$   $df/d\eta = 1$  maka

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\eta} &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2 \\ 1 &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}(\infty) \\ \exp(c_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$



Akibatnya

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f}{d\eta^2} &= \exp\left(-\frac{\eta^2}{4} + c_1\right) \\
 &= \exp(c_1) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \\
 \frac{df}{d\eta} &= \exp(c_1) \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \\
 &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 f &= \int \frac{df}{d\eta} d\eta \\
 &= \int \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta \\
 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) - \int \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta \\
 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) + c_3
 \end{aligned}$$

Saat  $\eta = 0$ , maka  $f = 0$  sehingga

$$\begin{aligned}
 f &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) + c_3 \\
 0 &= \eta \operatorname{erf}(0) + \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}} + c_3 \\
 c_3 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
 f &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\
 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Untuk persamaan 7.2, misalkan  $h = ds/d\eta$ , maka

$$\begin{aligned}\frac{dh}{d\eta} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} h &= 0 \\ \frac{1}{h} \frac{dh}{d\eta} &= -\text{Pr} \frac{\eta}{2} \\ \ln h &= -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} + c_4 \\ h &= \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} + c_4 \right) \\ &= \exp(c_4) \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right)\end{aligned}$$

Karena  $h = df/d\eta$ , maka

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\eta} &= \exp(c_4) \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right) \\ s &= \int \exp(c_4) \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right) d\eta \\ &= \exp(c_4) \int \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right) d\eta\end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral eksponensial yang melibatkan fungsi error seperti cara sebelumnya, maka

$$\begin{aligned}s &= \exp(c_4) \int \exp \left( -\text{Pr} \frac{\eta^2}{4} \right) d\eta \\ &= \exp(c_4) \sqrt{\pi} \text{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) + c_5\end{aligned}$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned}t \geq 0 : \quad f &= df/d\eta = 0, \quad s = 1 \text{ untuk } \eta = 0 \\ f &= df/d\eta = 1, \quad s = 0 \text{ saat } \eta \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Karena untuk  $\eta = 0$ ,  $s = 1$ , maka

$$\begin{aligned}s &= \exp(c_4) \sqrt{\pi} \text{erf} \left( \frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) + c_5 \\ 1 &= \exp(c_4) \sqrt{\pi} \text{erf}(0) + c_5 \\ c_5 &= 1\end{aligned}$$

Karena saat  $\eta \longrightarrow \infty$ ,  $s = 0$ , maka

$$\begin{aligned}s &= \exp(c_4) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}(\infty) + 1 \\ -1 &= \exp(c_4) \sqrt{\pi} \mathbf{erf}(0) \\ \exp(c_4) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\eta} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\text{Pr} \frac{\eta^2}{4}\right) \\ s &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}}\right) + 1 \\ &= -\mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\text{Pr}}\right) + 1\end{aligned}$$



## LAMPIRAN H

### Penurunan Kondisi Batas untuk Kecepatan

Diketahui bahwa kondisi batas pada persamaan fungsi alir

$$\text{saat } t < 0, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x \text{ dan } y$$

$$\text{saat } t \geq 0, \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ untuk } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = r(x)u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x)r(x)\frac{\partial f}{\partial y} \\ r(x)u_e(x) &= u_e(x)r(x)\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh bahwa kondisi batas persamaan similaritas untuk *small time* saat  $y \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$



## LAMPIRAN I

### Diskritisasi dan Linierisasi

Diskritisasi dan linierisasi persamaan momentum untuk *small time* bertujuan untuk memperoleh nilai kecepatan  $u$  atau  $\partial f / \partial \eta$ . Diketahui persamaan momentum untuk *small time* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \cos x \left( 1 - u^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} t \sin x \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - tM(u - 1) - \frac{2}{3} t \text{Ris} \end{aligned}$$

Persamaan momentum untuk *small time* di atas didiskritisasikan untuk penyelesaian turunan spasial terhadap arah  $-\eta$  beserta variabel  $u$  itu sendiri saat  $t + \Delta t$ . Setelah itu, persamaan tersebut dilinierisasikan untuk mencari selisih antara  $u_{i,j}^{n+1}$  dan  $u_{i,j}^n$ , yaitu  $\Delta u_{i,j}^n$ . Nilai  $\Delta u_{i,j}^n$  ini yang diselesaikan secara implisit. Akibatnya, ruas kiri persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \cos x \left( 1 - u^2 + 2f \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ = \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{1}{4} \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) \\ + \frac{3}{2} t^{n+1} \cos x \left( 1 - (u_{i,j}^{n+1})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n (3u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) \right) \\ = \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (u_{i,j+1}^n + \Delta u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n - 2\Delta u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + \Delta u_{i,j-1}^n) \\ + \frac{1}{4} \frac{\eta_j}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^n + 3\Delta u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n - 4\Delta u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + \Delta u_{i,j-1}^n) \\ + \frac{3}{2} t^{n+1} \cos x \left( 1 - (u_{i,j}^{n+1})^2 - 2u_{i,j}^n \Delta u_{i,j}^n + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \right. \\ \left. (3u_{i+1,j}^n + 3\Delta u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n - 4\Delta u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + \Delta u_{i,j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned}
& t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} t \sin x \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - t M(u-1) - \frac{2}{3} t \text{Ris} \\
&= \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} (3u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}) + \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^{n+1} (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \right) - t^{n+1} M(u_{i,j}^{n+1} - 1) - \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ris}_{i,j}^n \\
&= \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} (3\Delta u_{i,j}^n - \Delta u_{i,j}^{n-1}) + \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j}^n + \Delta u_{i,j}^n) \right. \\
&\quad \left. (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta \eta} \frac{1}{\Delta x} (3u_{i,j+1}^n + 3\Delta u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n - 4\Delta u_{i,j}^n \right. \\
&\quad \left. + u_{i,j-1}^n + \Delta u_{i,j-1}^n) (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \right) - t^{n+1} M(u_{i,j}^n + \Delta u_{i,j}^n - 1) \\
&\quad - \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ris}_{i,j}^n
\end{aligned}$$

Dari kedua ruas tersebut, nilai dari variabel  $\Delta u_{i,j+1}^n, \Delta u_{i,j}^n, \Delta u_{i,j-1}^n$  dikelompokkan dalam satu ruas sehingga persamaan momentum untuk *small time* jika didiskritisasikan terhadap arah  $-\eta$  dapat ditulis sebagai

$$-(a_1)\Delta u_{i,j+1}^n + (a_2)\Delta u_{i,j}^n - (a_3)\Delta u_{i,j-1}^n = k_j$$

dengan

$$\begin{aligned}
(a_0) &= \frac{1}{4} \frac{\eta_j}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta x \Delta \eta} (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(a_1) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + (a_0) \\
(a_2) &= \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3t^{n+1} u_{i,j}^n \cos x - t^{n+1} M + 4(a_0) \\
(a_3) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3(a_0)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
k_j = & \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} \Delta u_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) + \frac{1}{4} \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\
& + \frac{3}{2} t \cos x \left( 1 - (u_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta \eta} f_{i,j}^n (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) \\
& - \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right) + t^{n+1} M(u_{i,j}^n - 1) + \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ris}_{i,j}^n
\end{aligned}$$

dan error sebesar

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} t^{n+1} \cos x \left( -(\Delta u_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta \eta} \Delta f_{i,j}^n (3u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) \right) \\
& - \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \Delta u_{i,j}^n (3\Delta u_{i+1,j}^n - 4\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{i-1,j}^n) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3\Delta f_{i+1,j}^n - 4\Delta f_{i,j}^n + \Delta f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3\Delta u_{i,j+1}^n - 4\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{i,j-1}^n) \right) \\
& + \frac{2}{3} t^{n+1} \text{Ri} \Delta s_{i,j}^n
\end{aligned}$$

Penyelesaian temperatur pada saat  $t + \Delta t$  diperoleh dengan diskritisasi  $n + 1$  untuk turunan spasial terhadap arah  $-x$  beserta variabel  $s$ . Setelah itu, persamaan tersebut dilinierisasikan. Nilai  $\Delta s_{i,j+1}^n$ ,  $\Delta s_{i,j}^n$ ,  $\Delta s_{i,j-1}^n$  diselesaikan secara implisit. Akibatnya, penyelesaian  $s_{i,j+1}^{n+1}$ ,  $s_{i,j}^{n+1}$ ,  $s_{i,j-1}^{n+1}$  diperoleh. Ruas kiri persamaan energi untuk ruas kiri pada arah  $-x$  ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + 3\text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} \cos x \\
& = \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (s_{i,j+1}^{n+1} - 2s_{i,j}^{n+1} + s_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{1}{4} \text{Pr} \frac{\eta_j}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^{n+1} - 4s_{i,j}^{n+1} + s_{i,j-1}^{n+1}) \\
& + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta \eta} \text{Pr} t^{n+1} f_{i,j}^n \cos x (3s_{i,j+1}^{n+1} - 4s_{i,j}^{n+1} + s_{i,j-1}^{n+1}) \\
& = \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (s_{i,j+1}^n + \Delta s_{i,j+1}^n - 2s_{i,j}^n - 2\Delta s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n + \Delta s_{i,j-1}^n) \\
& + \frac{1}{4} \frac{\eta_i}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n + 3\Delta s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n - 4\Delta s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n + \Delta s_{i,j-1}^n) \\
& + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta \eta} \text{Pr} t^{n+1} f_{i,j}^n \cos x (3s_{i,j+1}^n + 3\Delta s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n - 4\Delta s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n + \Delta s_{i,j-1}^n)
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned}
& \text{Pr}t \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( u \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \\
&= \text{Pr}t^{n+1} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3s_{i,j}^{n+1} - 4s_{i,j}^n + s_{i,j}^{n-1}) \right. \\
&\quad + \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^{n+1} - 4s_{i,j}^{n+1} + s_{i,j-1}^{n+1}) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \right) \right) \\
&= \text{Pr}t^{n+1} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3\Delta s_{i,j}^n - \Delta s_{i,j}^n) + \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n + 3\Delta s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n - 4\Delta s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n + \Delta s_{i,j-1}^n) \right)
\end{aligned}$$

Dari ruas kiri dan ruas kanan, persamaan energi ditulis sebagai

$$-(b_1)\Delta s_{i,j+1}^n + (b_2)\Delta s_{i,j}^n - (b_3)\Delta s_{i,j-1}^n = l_i$$

dengan

$$\begin{aligned}
(b_0) &= \frac{1}{4} \text{Pr} \frac{\eta_j}{\Delta \eta} + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta x \Delta \eta} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x \\
(b_1) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + (b_0) \\
(b_2) &= \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3t^{n+1} u_{i,j}^n \cos x + 4(b_0) \\
(b_3) &= \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + 3(b_0) \\
l_j &= \frac{1}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} \Delta s_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} (s_{i,j+1}^n - 2s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \\
&\quad + \frac{1}{4} \text{Pr} \frac{\eta_j}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) + \frac{3}{2} \text{Pr} \frac{t^{n+1}}{\Delta \eta} f_{i,j}^n \cos x \\
&\quad (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) - \frac{3}{2} t^{n+1} \sin x \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^n (3s_{i+1,j}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3f_{i+1,j}^n - 4f_{i,j}^n \right. \\
&\quad \left. + f_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3s_{i,j+1}^n - 4s_{i,j}^n + s_{i,j-1}^n) \right)
\end{aligned}$$

dan error sebesar

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}t^{n+1} \cos x \frac{1}{\Delta\eta} \Delta f_{i,j}^n (3s_{i,j+1}^{n+1} - 4s_{i,j}^{n+1} + s_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{3}{2}t^{n+1} \sin x \\ & \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \Delta u_{i,j}^n (3s_{i+1,j}^{n+1} - 4s_{i,j}^{n+1} + \Delta s_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3\Delta f_{i+1,j}^n - 4\Delta f_{i,j}^n + \Delta f_{i-1,j}^n) \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta\eta} (3\Delta s_{i,j+1}^n - 4\Delta s_{i,j}^n + \Delta s_{i,j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

Diskritisasi dan linierisasi persamaan momentum untuk *large time* bertujuan untuk memperoleh nilai kecepatan  $U$  atau  $\partial F/\partial Y$ . Diketahui persamaan momentum untuk *large time* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - U^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\ & = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - M(U - 1) - \frac{2}{3} \text{RiS} \end{aligned}$$

Persamaan momentum untuk *large time* di atas didiskritisasikan untuk penyelesaian turunan spasial terhadap arah  $-Y$  beserta variabel  $u$  itu sendiri saat  $t + \Delta t$ . Setelah itu, persamaan tersebut dilinierisasikan untuk mencari selisih antara  $U_{i,j}^{n+1}$  dan  $U_{i,j}^n$ , yaitu  $\Delta U_{i,j}^n$ . Nilai  $\Delta U_{i,j}^n$  ini yang diselesaikan secara implisit. Akibatnya, ruas kiri persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - U^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\ & = \frac{1}{(\Delta Y)^2} (U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \\ & + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - (U_{i,j}^{n+1})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n (3U_{i,j+1}^{n+1} - 4U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \right) \\ & = \frac{1}{(\Delta Y)^2} (U_{i,j+1}^n + \Delta U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n - 2\Delta U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n + \Delta U_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - (U_{i,j}^{n+1})^2 - 2U_{i,j}^n \Delta U_{i,j}^n + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n \right. \\ & \left. (3U_{i+1,j}^n + 3\Delta U_{i,j+1}^n - 4U_{i,j}^n - 4\Delta U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n + \Delta U_{i,j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - M(U-1) - \frac{2}{3} \text{Ri} S \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3U_{i,j}^{n+1} - 4U_{i,j}^n + U_{i,j}^{n-1}) + \frac{3}{2} \sin x \\
& \quad \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} U_{i,j}^{n+1} (3U_{i+1,j}^n - 4U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3U_{i,j+1}^{n+1} - 4U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \right) - M(U_{i,j}^{n+1} - 1) - \frac{2}{3} \text{Ri} S_{i,j}^n \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3\Delta U_{i,j}^n - \Delta U_{i,j}^{n-1}) + \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n) \right. \\
& \quad (3U_{i+1,j}^n - 4U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) - \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta Y} \frac{1}{\Delta x} (3U_{i,j+1}^n + 3\Delta U_{i,j+1}^n - 4U_{i,j}^n - 4\Delta U_{i,j}^n \\
& \quad \left. + U_{i,j-1}^n + \Delta U_{i,j-1}^n) (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \right) - M(U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n - 1) - \frac{2}{3} \text{Ri} S_{i,j}^n
\end{aligned}$$

Dari kedua ruas tersebut, nilai dari variabel  $\Delta U_{i,j+1}^n$ ,  $\Delta U_{i,j}^n$ ,  $\Delta U_{i,j-1}^n$  dikelompokkan dalam satu ruas sehingga persamaan momentum untuk *large time* jika didiskritisasikan terhadap arah  $-Y$  dapat ditulis sebagai

$$-(A_1)\Delta U_{i,j+1}^n + (A_2)\Delta U_{i,j}^n - (A_3)\Delta U_{i,j-1}^n = K_j$$

dengan

$$\begin{aligned}
(A_0) &= \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta x \Delta Y} (3F_{i,j+1}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n \cos x \\
(A_1) &= \frac{1}{(\Delta Y)^2} + (A_0) \\
(A_2) &= \frac{3}{2} \frac{t^{n+1}}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta Y)^2} + 3U_{i,j}^n \cos x - M + 4(A_0) \\
(A_3) &= \frac{1}{(\Delta Y)^2} + 3(A_0) \\
K_j &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \Delta U_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta Y)^2} (U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) \\
& \quad + \frac{3}{2} \cos x \left( 1 - (U_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n (3U_{i,j+1}^n - 4U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) \right) \\
& \quad - \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} U_{i,j}^n (3U_{i+1,j}^n - 4U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3U_{i,j+1}^n - 4U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) \right) + M(U_{i,j}^n - 1) + \frac{2}{3} \text{Ri} S_{i,j}^n
\end{aligned}$$

dan error sebesar

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \cos x \left( -(\Delta U_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{\Delta Y} \Delta F_{i,j}^n (3U_{i,j+1}^{n+1} - 4U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \right) \\
& - \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \Delta U_{i,j}^n (3\Delta U_{i+1,j}^n - 4\Delta U_{i,j}^n + \Delta U_{i-1,j}^n) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3\Delta F_{i+1,j}^n - 4\Delta F_{i,j}^n + \Delta F_{i-1,j}^n) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3\Delta U_{i,j+1}^n - 4\Delta U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j-1}^n) \right) \\
& + \frac{2}{3} \text{Ri} \Delta S_{i,j}^n
\end{aligned}$$

Penyelesaian temperatur pada saat  $t + \Delta t$  diperoleh dengan diskritisasi  $n + 1$  untuk turunan spasial terhadap arah  $-\eta$  beserta variabel  $s$ . Setelah itu, persamaan tersebut dilinierisasikan. Nilai  $\Delta s_{i,j+1}^n$ ,  $\Delta s_{i,j}^n$ ,  $\Delta s_{i,j-1}^n$  diselesaikan secara implisit. Akibatnya, penyelesaian  $s_{i,j+1}^{n+1}$ ,  $s_{i,j}^{n+1}$ ,  $s_{i,j-1}^{n+1}$  diperoleh. Ruas kiri persamaan energi untuk ruas kiri pada arah  $-\eta$  ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + 3\text{Pr}F \frac{\partial S}{\partial Y} \cos x \\
& = \frac{1}{(\Delta Y)^2} (S_{i,j+1}^{n+1} - 2S_{i,j}^{n+1} + S_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta Y} \text{Pr}F_{i,j}^n \cos x (3S_{i,j+1}^{n+1} - 4S_{i,j}^{n+1} + S_{i,j-1}^{n+1}) \\
& = \frac{1}{(\Delta Y)^2} (S_{i,j+1}^n + \Delta S_{i,j+1}^n - 2S_{i,j}^n - 2\Delta S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n + \Delta S_{i,j-1}^n) \\
& \quad + \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta Y} \text{Pr}F_{i,j}^n \cos x (3S_{i,j+1}^n + 3\Delta S_{i,j+1}^n - 4S_{i,j}^n - 4\Delta S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n + \Delta S_{i,j-1}^n)
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk ruas kanan

$$\begin{aligned}
& \text{Pr}t \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{3}{2} \sin x \left( U \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right) \\
& = \text{Pr} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3S_{i,j}^{n+1} - 4S_{i,j}^n + S_{i,j}^{n-1}) \right. \\
& \quad + \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} U_{i,j}^n (3S_{i+1,j}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i-1,j}^n) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3S_{i,j+1}^{n+1} - 4S_{i,j}^{n+1} + S_{i,j-1}^{n+1}) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \right) \right) \\
& = \text{Pr} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (3\Delta S_{i,j}^n - \Delta S_{i,j}^n) + \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} U_{i,j}^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (3S_{i+1,j}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3S_{i,j+1}^n + 3\Delta S_{i,j+1}^n - 4S_{i,j}^n - 4\Delta S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n + \Delta S_{i,j-1}^n) \right) \right)
\end{aligned}$$

Dari ruas kiri dan ruas kanan, persamaan energi ditulis sebagai

$$-(B_1)\Delta S_{i,j+1}^n + (B_2)\Delta S_{i,j}^n - (B_3)\Delta S_{i,j-1}^n = L_j$$

dengan

$$\begin{aligned} (B_0) &= \frac{3}{2} \Pr \frac{1}{\Delta x \Delta Y} (3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n) \sin x + \frac{3}{2} \Pr \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n \cos x \\ (B_1) &= \frac{1}{(\Delta Y)^2} + (B_0) \\ (B_2) &= \frac{3}{2} \Pr \frac{1}{\Delta t} + 2 \frac{1}{(\Delta Y)^2} + 3U_{i,j}^n \cos x + 4(B_0) \\ (B_3) &= \frac{1}{(\Delta Y)^2} + 3(B_0) \\ L_j &= \frac{1}{2} \Pr \frac{1}{\Delta t} \Delta S_{i,j}^n + \frac{1}{(\Delta Y)^2} (S_{i,j+1}^n - 2S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n) \\ &\quad + \frac{3}{2} \Pr \frac{1}{\Delta Y} F_{i,j}^n \cos x (3S_{i,j+1}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n) \\ &\quad - \frac{3}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} U_{i,j}^n (3S_{i+1,j}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i-1,j}^n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \left( 3F_{i+1,j}^n - 4F_{i,j}^n + F_{i-1,j}^n \right) \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3S_{i,j+1}^n - 4S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

dan error sebesar

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} \cos x \frac{1}{\Delta Y} \Delta f_{i,j}^n (3S_{i,j+1}^{n+1} - 4S_{i,j}^{n+1} + S_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{3}{2} \sin x \\ &\left( \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \Delta U_{i,j}^n (3S_{i+1,j}^{n+1} - 4S_{i,j}^{n+1} + S_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} (3\Delta F_{i+1,j}^n - 4\Delta F_{i,j}^n + \Delta F_{i-1,j}^n) \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta Y} (3\Delta S_{i,j+1}^n - 4\Delta S_{i,j}^n + \Delta S_{i,j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

Diskritisasi untuk nilai  $f$  hanya dilakukan pada arah  $-\eta$  karena  $\partial f / \partial \eta = u$ . Akibatnya, untuk mencari nilai  $f$  saat  $t + \Delta t$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta} &= u \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \eta} (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n) &= u_{i,j}^n \\ 3(f_{i,j+1}^n + \Delta f_{i,j+1}^n) - 4(f_{i,j}^n + \Delta f_{i,j}^n) + (f_{i,j-1}^n + \Delta f_{i,j-1}^n) &= 2u_{i,j}^n \Delta \eta \\ 3\Delta f_{i,j+1}^n - 4\Delta f_{i,j}^n + \Delta f_{i,j-1}^n &= (f_0)_i \end{aligned}$$

dimana  $(f_0)_i = 2u_{i,j}^n \Delta \eta - (3f_{i,j+1}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n)$  dengan error sebesar  $\Delta u_{i,j}^n$ .

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Lutfi Mardianto, dilahirkan pada tanggal 4 Oktober 1990 di Desa Lemahbang, Kecamatan Sukorejo, Kabupaten Pasuruan, Provinsi Jawa Timur. Penulis merupakan anak kedua dari empat bersaudara. Pendidikan formal yang ditempuh penulis diantaranya SDN Lemahbang II, SMPN 1 Sukorejo dan SMAN 1 Purwosari. Penulis melakukan studi Strata-1 di Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada tahun 2009 - 2014. Penulis melanjutkan studi Strata-2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya di semester ganjil pada tahun 2016 dengan peminatan pada bidang Matematika Terapan. Apabila ada pertanyaan atau masukan tentang penulisan tesis ini, penulis dengan senang hati akan menerimanya melalui *e-mail* [lutfimardianto90@gmail.com](mailto:lutfimardianto90@gmail.com)